

Algorithmen zur optimalen Quantisierung von Signalen

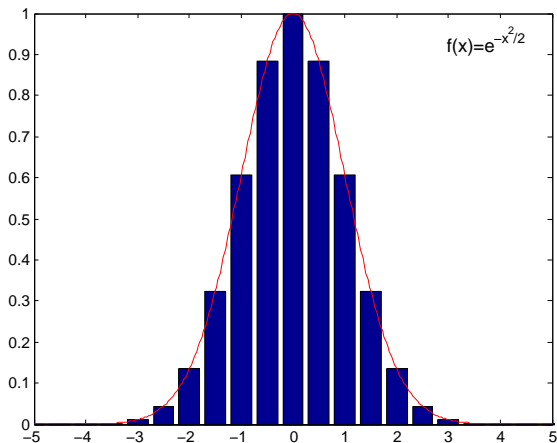
Flavius Guias
Universität Dortmund

Habilitationsvortrag, 7.02.2007

- 1 Mathematische Grundlagen
- 2 Ein effizienter Algorithmus für die skalare Quantisierung (X. Wu, 1991)

- **Signal:** W'Maß P auf \mathbb{R}^d (bzw. ZV X mit Verteilung P , oder Dichtefunktion f von P).
- **Quantisierung:** Darstellung (Codierung) des Signals durch eine endliche Menge von Quantisierungslevel (Codewörter) $c = \{y_1, \dots, y_n\} \subset \mathbb{R}^d$ (Codebuch).
- **n -Quantisierer:** eine Borel-messbare Abbildung $q : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit $|q(\mathbb{R}^d)| \leq n$ ($q \in \mathcal{F}_n$).
- **Zellen:** $S_i = q^{-1}(\{y_i\})$ d.h. $x \in S_i \Leftrightarrow q(x) = y_i$ (Partition von \mathbb{R}^d).
- **Quantisierungsfehler:** $D(q) = E[d(X, q(X))] = \sum_{i=1}^n \int_{S_i} d(x, y_i) dP(x)$, mit d eine Abstandsfunktion auf \mathbb{R}^d und ZV $X \sim P$.
 - ▶ häufige Wahl: $d(x, y) = \|x - y\|^r$ mit $\|\cdot\|$ Norm auf \mathbb{R}^d , $r \geq 1$ Parameter.
 - ▶ speziell: $d(x, y) = |x - y|^2$ ($|\cdot|$: euklidischer Abstand)

1898: W.F.Sheppard: *“On the calculation of the most probable values of frequency constants for data arranged according to equidistant divisions of a scale”*

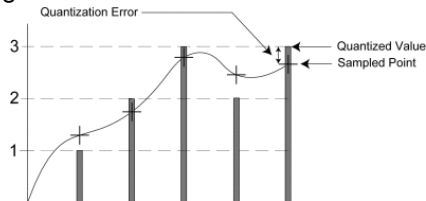
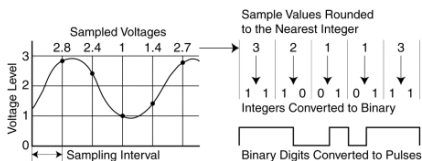


Histogramme

- Oliver, Pierce, Shannon (1948): “PCM” (pulse-code modulation)

akustische Signale

- 1 Tiefpass-Filter ($f_s/2$)
- 2 Sampling mit Frequenz f_s
- 3 Quantisierung der Amplituden (A/D-Konversion)
- 4 Bit-Darstellung: -feste Rate: $R = \lceil \log n \rceil$
-variable Rate (Huffman-Codierung)
- 5 Übertragung des digitalisierten Signals
- 6 Dekodierung (D/A-Konversion)



■ $d > 1$: Vektorquantisierung

Shannon (1949,1959): “source coding theory”

- ▶ Zerlegung des akustischen Signals in d aufeinanderfolgende Blöcke
- ▶ gleichzeitige Quantisierung über \mathbb{R}^d

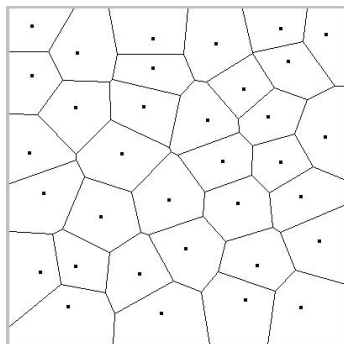
Lösung des Minimierungsproblems

$$\inf_{q \in \mathcal{F}_n} D(q) = \inf_{q \in \mathcal{F}_n} E[d(X, q(X))],$$
$$X \sim P.$$

- 1 **START:** beliebiger Quantisierer q_0 mit Codebuch $c_0 = \{x_1, \dots, x_n\}$.
- 2 **optimale Partition für gegebenes Codebuch:**

$$S_i \subset \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, x_i) \leq d(x, x_j), \forall j \neq i\}.$$

Voronoi-Diagramm:



-definiere $q_1(x) = \sum_{i=1}^n x_i 1_{S_i}(x)$.

3 optimales Codebuch für gegebene Partition:

-gegeben: $S_i = q_1^{-1}(\{x_i\})$

-ersetze x_i durch y_i definiert durch:

$$E[d(X, y_i) | X \in S_i] = \min_y E[d(X, y) | X \in S_i]$$

y_i : **Zentroid** für S_i .

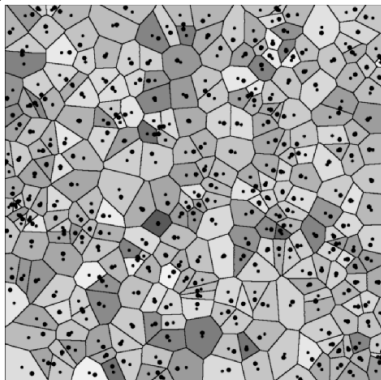
-definiere $q_2(x) = \sum_{i=1}^n y_i 1_{S_i}(x)$.

Beispiel: $d(x, y) = |x - y|^2$,

$$y_i = \frac{\int_{S_i} x dP(x)}{P(S_i)} = E[X | X \in S_i].$$

(Massenzentrum)

- **Abstiegsalgorithmus:** alterniere Schritte 1. und 2.



- **Abbruch:** falls $D(q_i) - D(q_{i+1}) < \varepsilon D(q_i)$.

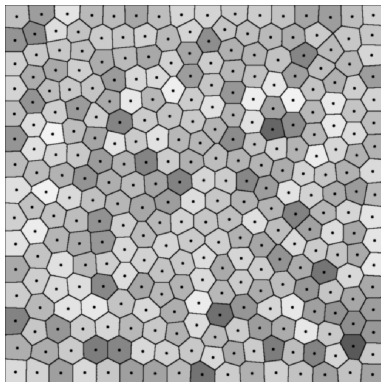
“Algorithmus von Lloyd”

-S.P.Lloyd (1957), $d = 1$, $|x - y|^2$

-H.Steinhaus (1956), $d = 3$, $|x - y|^2$.

notwendige Bedingungen zur (lokalen) Optimalität:

- 1 Partition optimal zum Codebuch
- 2 Codebuch optimal zur Partition



i.A. nicht hinreichend: Gegenbeispiel: Lloyd (1982).

- falls P diskretes W 'Maß : (1) und (2) sind hinreichend zur lokalen Optimalität.
- weitere notwendige Bedingung: $P(\bar{S}_i \cap \bar{S}_j) = 0$ für $i \neq j$.

**d.h. wenn Konvergenz, dann evtl. gegen ein lokales Minimum
(möglicherweise schlecht!)**

■ **simulated annealing** (stochastische Relaxation)

- ▶ neues Codebuch + zufälliges Rauschen mit $E[\cdot] = 0$.
- ▶ *Metropolis-Methode*: falls Fehler kleiner, akzeptiere die neue Konfiguration, sonst akzeptiere mit W'keit $e^{-\beta\Delta D}$, $\beta = T^{-1}$.
 T : Temperatur (Varianz des Rauschens) \rightarrow verringert im Laufe der Simulation

■ **fuzzy-clustering** (für diskrete W'Maße)

■ **genetische Algorithmen**

■ **neuronale Netze**

■ **prädiktive Verfahren** (mit Gedächtnis): für Folgen von Input-Vektoren (z.B. Videosignale)

- ▶ Prädiktor: $\tilde{X}_n = \phi(X_{n-1}, \dots, X_{n-m})$
- ▶ Input-Vektor: X_n
- ▶ Fehler: $X_n - \tilde{X}_n =: e_n \xrightarrow{q} \hat{e}_n$ (quantisiert)
- ▶ setze $\hat{X}_n = \tilde{X}_n + \hat{e}_n$.

- Ansätze für die Struktur des Codebuchs (z.B. Gitter)
- Baum-Strukturierung: schrittweise Eliminierung der ungeeigneten Kandidaten y_j in der Berechnung von $\min_j d(x, y_j)$.
- Minimiere eine Kombination zwischen Fehlermaß und Kostenfunktion (Komplexitätskosten)

(Graf & Luschgy : Foundations of Quantization for Probability Distributions (2000))

- Annahme: $d(x, y) = \|x - y\|^r$ mit $\|\cdot\|$ Norm auf \mathbb{R}^d , $r \geq 1$.
- Definiere $\psi_r : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi_r(a) = E[\|X - a\|^r]$ (konvex).
- Sei $C_r(P) = \{y : \psi_r(y) \text{ min}\}$ (Zentroide)
- Falls ψ_r strikt konvex $\Rightarrow |C_r(P)| = 1$ (Eindeutigkeit)
- **Hinreichende Bedingungen für strikte Konvexität:**
 - ▶ $r > 1$ und ($\|\cdot\|$ strikt konvex oder $P(S(a, b)) < 1 \forall a, b$)
($S(a, b) := \{x : \|x - a\| = \|x - b\|\}$)
 - ▶ $r = 1$, $\|\cdot\|$ strikt konvex und $P(L) < 1$, $\forall L \subset \mathbb{R}^d$ (Gerade)
- Sei $\nabla_+ \|\cdot\|(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}$ (Richtungsableitung)
- falls $\|\cdot\|$ diff'bar auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ ("glatt"):
 $\nabla \|\cdot\|(x)$ (Gradient in $x \neq 0$).

1. Äquivalenz

n -Quantisierungsproblem \Leftrightarrow **n -Zentren-Problem**

$$V_{n,r}(P) := \inf_{q \in \mathcal{F}_n} E[\|X - q(X)\|^r] = \inf_{|c| \leq n} E[\min_{a \in c} \|X - a\|^r]$$

$$c = \{a_1, \dots, a_n\}$$

$$\psi_{n,r}(a_1, \dots, a_n) = E[\min_{1 \leq i \leq n} \|X - a_i\|^r].$$

$n > 1$: mehrere Zentren \Rightarrow i.a. $\psi_{n,r}$ nicht konvex.

n -Quantisierungsproblem \Leftrightarrow **beste Approximation von P durch ein diskretes W'Maß mit $\leq n$ Trägerpunkte**

$$V_{n,r}(P) = \inf_{Q \in \mathcal{P}_n} \rho_r^r(P, Q)$$

Abstandsbegriff:

$$\rho_r(P_1, P_2) = \inf_{\mu} \left(\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \|x - y\|^r d\mu(x, y) \right)^{1/r}$$

für P_1, P_2 Borel W'Maße auf \mathbb{R}^d mit $\int \|x\|^r dP_i(x) < \infty$

wobei μ Borel W'Maß auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ mit Marginalien P_1 und P_2 :
 $\mu(A \times \mathbb{R}^d) = P_1(A)$, $\mu(\mathbb{R}^d \times B) = P_2(B)$.

Theorem

(Zador, u.a.)

Für

$$Q_r([0, 1]^d) := \inf_{n \geq 1} n^{r/d} V_{n,r}(U([0, 1]^d))$$

gilt $Q_r([0, 1]^d) > 0$ und, falls $E[\|X\|^{r+\delta}] < \infty$ für ein $\delta > 0$ und $dP = fd\lambda^d$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{r/d} V_{n,r}(P) = Q_r([0, 1]^d) \cdot \|f\|_{L^{d/d+r}}.$$

$r = 2, \|\cdot\| = |\cdot|$:

$$\begin{aligned} n^{2/d} V_{n,r}(U([0, 1]^d)) &= n^{2/d} \sum_{i=1}^n \int_{S_i} |x - y_i|^2 dx \\ &= n^{2/d} \sum_{i=1}^n \left(\lambda^d(S_i)^{-(d+2)/d} \int_{S_i} |x - y_i|^2 dx \right) \cdot \lambda^d(S_i)^{(d+2)/d} \\ &= n^{2/d} \sum_{i=1}^n M(S_i, y_i) \cdot \lambda^d(S_i)^{(d+2)/d} \end{aligned}$$

$M(S_i, y_i)$: Trägheitsmoment.

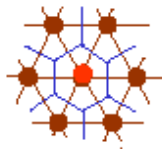
falls $n \rightarrow \infty$ und alle Zellen kongruent ($\sim S$):

$$Q_2([0, 1]^d) \approx n^{2/d} \cdot n \cdot M(S) \cdot n^{-(d+2)/d} = M(S).$$

Gersho's Vermutung (1979):

das **inf** wird erreicht falls alle Zellen kongruent zu einer Zelle sind, welche \mathbb{R}^d tesseliert. Diese Tessellation ist eine Voronoi-Partition entsprechend zu einem Gitter.

- $d = 2$: wahr (L. Fejes Toth (1959)) \rightarrow Hexagone



- $d = 3$ (?)
 - ▶ bestes Gitter: kubisches Gitter, Tessellation durch Oktaedren
 - ▶ numerische Experimente: Du & Wang (2005)