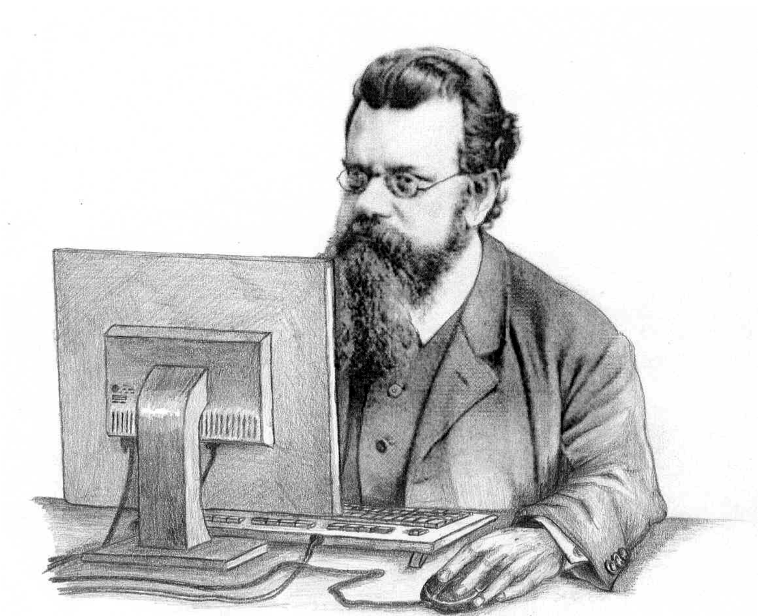
Einführung in die Boltzmann-Gleichung

Flavius Guiaş
Universität Dortmund

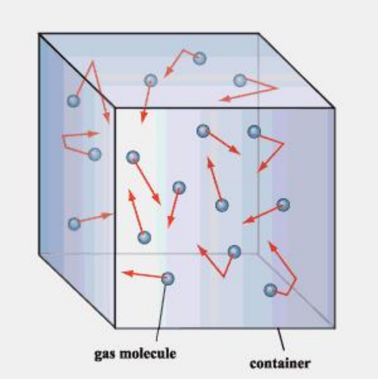
Antrittsvorlesung, 19.04.2007

INHALT

Ludwig Boltzmann (1844-1906)



Kinetische Gastheorie



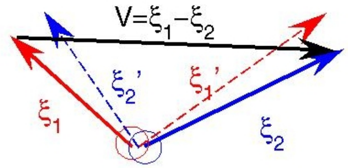
- elastische Moleküle
- keine äußere Kräfte
- Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit
  - bis zur Kollision mit anderes Molekül oder mit der Wand
- große Anzahl: $\sim 10^{20}$

Zustand des Systems

- Position, Geschwindigkeit jedes Moleküls
- wegen der großen Anzahl $\rightarrow$ Mittelungen:

  1-Teilchen Wahrscheinlichkeitsdichte: $P^{(1)}(x, \xi, t)$
  $x = (x_1, x_2, x_3)$: Position
  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$: Geschwindigkeit
  t: Zeitpunkt

- Moleküle $\leftrightarrow$ harte Kugeln



- **Kollision**

Geschwindigkeiten nach der Kollision

$$\begin{aligned}\xi_1' &= \xi_1 - \mathbf{nn}\cdot(\xi_1-\xi_2)\\ \xi_2' &= \xi_2 + \mathbf{nn}\cdot(\xi_1-\xi_2)\end{aligned}$$

n: Normalenvektor der Richtung $\xi_1 - \xi_1'$.

- erfüllen *Impuls- und Energieerhaltung:*

$$\begin{cases}\xi_1' + \xi_2' &= \xi_1 + \xi_2\\ |\xi_1'|^2 + |\xi_2'|^2 &= |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2\end{cases}$$

- relative Geschwindigkeiten:
  - vor der Kollision: $\mathbf{V} = \xi_1 - \xi_2$
  - nach der Kollision: $\mathbf{V}' = \mathbf{V} - 2\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{V})$

Evolutionsgleichung für $P^{(1)}$

1-Teilchen Wahrscheinlichkeitsdichte: $P^{(1)} = P^{(1)}(x, \xi, t)$.

$$\frac{\partial P^{(1)}}{\partial t} + \xi_1 \cdot \frac{\partial P^{(1)}}{\partial x_1} = G - L$$

- **L: "loss"-Term**
  $L dx_1 d\xi_1 dt$: erwartete Anzahl der Teilchen welche aus dem Bereich $x_1, x_1 + dx_1$; $\xi_1, \xi_1 + d\xi_1$; $t + dt$ des Zustandsraums verschwinden, bedingt durch Kollisionen.

- **G: "gain"-Term**
  $G dx_1 d\xi_1 dt$: erwartete Anzahl der Teilchen welche in dem Bereich $x_1, x_1 + dx_1, \xi_1$; $\xi_1 + d\xi_1$; $t + dt$ des Zustandsraums eintreten, bedingt durch Kollisionen.

Berechnung der gain- und loss-Terme

$\mathbf{V}_2 := \xi_2 - \xi_1$

Erwartete Anzahl von Kollisionen des Teilchens 2 mit Teilchen 1 im Bereich $x_1, x_1 + dx_1$; $x_2, x_2 + dx_2$; $\xi_1, \xi_1 + d\xi_1; \xi_2, \xi_2 + d\xi_2$; $t + dt$ des Zustandsraumes ist:

$$P^{(2)}(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2, t)\, dx_1\, d\xi_1\, d\xi_2\, \sigma^2 d\mathbf{n}\, |\mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{n}|\, dt.$$

Integration bzgl. $\mathbf{n}$ und ξ_2 liefert:

$$\ell dx_1 d\xi_1 dt = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathcal{B}^-} P^{(2)}(x_1, x_1 + \sigma\mathbf{n}, \xi_1, \xi_2, t)\, |\mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{n}|\, \sigma^2 d\mathbf{n}\, d\xi_2$$

mit $\mathcal{B}^- : \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} < 0$ *(Teilchen bewegen sich entgegen vor der Kollision)*

also:

$$L = (N-1)\ell = (N-1)\sigma^2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathcal{B}^-} P^{(2)}(x_1, x_1 + \sigma\mathbf{n}, \xi_1, \xi_2, t)\, |(\xi_2 - \xi_1) \cdot \mathbf{n}|\, d\xi_2 d\mathbf{n}.$$

analog:

$$G = (N-1)g = (N-1)\sigma^2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathcal{B}^+} P^{(2)}(x_1, x_1 + \sigma \mathbf{n}, \xi_1, \xi_2, t) \left| (\xi_2 - \xi_1) \cdot \mathbf{n} \right| d\xi_2 d\mathbf{n}$$

mit $\mathcal{B}^+ : \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} > 0$ *(Teilchen bewegen sich auseinander nach der Kollision)*.

Stetigkeit der 2-Teilchen-Dichtefunktion $\Rightarrow$

$$P^{(2)}(x_1, \xi_1, x_2, \xi_2, t) = P^{(2)}(x_1, \xi_1', x_2, \xi_2', t)$$

für $|x_1 - x_2| = \sigma$.
Also:

$$\begin{aligned} G &= (N-1)\sigma^2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathcal{B}^+} P^{(2)}(x_1, x_1 + \sigma \mathbf{n}, \xi_1', \xi_2', t) \left| (\xi_2 - \xi_1) \cdot \mathbf{n} \right| d\xi_2 d\mathbf{n} \\ & \quad (N-1)\sigma^2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathcal{B}^-} P^{(2)}(x_1, x_1 - \sigma \mathbf{n}, \xi_1', \xi_2', t) \left| (\xi_2 - \xi_1) \cdot \mathbf{n} \right| d\xi_2 d\mathbf{n} \end{aligned}$$

Annahmen

Größenordnungen (Skalen):
$N \simeq 10^{20}, \ \sigma \simeq 10^{-8} cm \Rightarrow N\sigma^2 \simeq (N-1)\sigma^2 \simeq 1 m^2$

- Boltzmann-Grad Limes: $N \to \infty, \ \sigma \to 0$, wobei $N\sigma^2$ endlich.
- Annahme des molekularen Chaos:

$$P^{(2)}(x_1, \xi_1, x_2, \xi_2) = P^{(1)}(x_1, \xi_1, t) P^{(1)}(x_2, \xi_2, t)$$

für zwei Moleküle **vor** der Kollision, d.h.

$$P^{(2)}(x_1, \xi_1, x_1 + \sigma \mathbf{n}, \xi_2) = P^{(1)}(x_1, \xi_1, t) P^{(1)}(x_1, \xi_2, t) \ \text{ für } \ (\xi_2 - \xi_1) \cdot \mathbf{n} < 0,$$

bzw. **nach** der Kollision:

$$P^{(2)}(x_1, \xi_1', x_1 + \sigma \mathbf{n}, \xi_2') = P^{(1)}(x_1, \xi_1', t) P^{(1)}(x_1, \xi_2', t) \ \text{ für } \ (\xi_2 - \xi_1) \cdot \mathbf{n} > 0.$$

Die Boltzmann-Gleichung

im Fall von harten Kugeln:

$$\frac{\partial P^{(1)}}{\partial t} + \xi_1 \cdot \frac{\partial P^{(1)}}{\partial x_1} = N\sigma^2 \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathcal{B}^-} [P^{(1)}(x_1,\xi_1',t)P^{(1)}(x_1,\xi_2',t) - P^{(1)}(x_1,\xi_1,t)P^{(1)}(x_1,\xi_2,t)]\, |(\xi_2-\xi_1)\cdot \mathbf{n}|\, d\xi_2 d\mathbf{n}$$

bzw. verallgemeinert:

$$\frac{\partial P^{(1)}}{\partial t} + \xi_1 \cdot \frac{\partial P^{(1)}}{\partial x_1} = N\sigma^2 \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathcal{B}^-} [P^{(1)}(x_1,\xi_1',t)P^{(1)}(x_1,\xi_2',t) - P^{(1)}(x_1,\xi_1,t)P^{(1)}(x_1,\xi_2,t)]\, B(\theta,|\xi_2-\xi_1|)\, d\xi_2 d\theta d\varepsilon$$

wobei:

- θ: Winkel zwischen **n** und **V**
- ε: der zweite Winkel welcher **n** bestimmt
- $B(\theta, |\xi_2 - \xi_1|)$: spezifische Wechselwirkung zwischen den Molekülen.

Allgemeine Form der Boltzmann-Gleichung

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + \xi \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathcal{B}^-} (f' f'_* - f f_*) \mathcal{B}(\theta, V) d\xi_* d\theta d\varepsilon}$$

wobei:

- f: Massendichte
- Symbole: **'** :nach der Kollision, $_*$: zweites Teilchen
- $V = |\xi - \xi_*|$
- $Q(f,f) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathcal{B}^-} (f' f'_* - f f_*) \mathcal{B}(\theta, V) d\xi_* d\theta d\varepsilon$: Kollisionsterm

es gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^3} Q(f,f)\phi(\xi) d\xi = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathcal{B}^-} (f' f'_* - f f_*)(\phi + \phi_* - \phi' - \phi'_*) \mathcal{B}(\theta, V) d\xi_* d\xi d\theta d\varepsilon$$

- ϕ: **Kollisionsinvariante**, falls $\phi + \phi_* = \phi' + \phi'_*$
- **stetige Kollisionsinvariante**: $\phi(\xi) = a + \mathbf{b} \cdot \xi + c|\xi|^2$

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^3} \log f \, Q(f,f) d\xi \leq 0}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $\log f$ Kollisionsinvariante, also

$$f = \exp(a + \mathbf{b} \cdot \xi + c|\xi|^2).$$

Für $c = -\beta, \mathbf{b} = 2\beta\mathbf{v}$ ($\mathbf{v}$: konstanter Vektor) ist die Lösung der Gleichung $Q(f,f) = 0$ gegeben durch:

$$\boxed{f = A \exp(-\beta|\xi - \mathbf{v}|^2)}$$

(Maxwell-Verteilung)

Boltzmannsches $\mathcal{H}$-Theorem

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = Q(f,f)$$

impliziert (durch Multiplikation mit $\log f$ und Integration): $\boxed{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot \mathbf{J} = \mathcal{S}}$

wobei: $\mathcal{H} = \int_{\mathbb{R}^3} f \log f \, d\xi, \;\; \mathbf{J} = \int_{\mathbb{R}^3} \xi f \log f \, d\xi, \;\; \mathcal{S} = \int_{\mathbb{R}^3} \log f \, Q(f,f) \, d\xi.$

Theorem

Im räumlich homogenen Fall gilt

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \mathcal{S} \leq 0,$$

d.h. $\mathcal{H}$ ist monoton fallend und bleibt konstant genau dann, wenn f eine Maxwell-Verteilung ist.

Fragestellungen

- **Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen**
  - *R. DiPerna, P. L. Lions* (1989): globale Existenz schwacher Lösungen für allgemeine Anfangsdaten
  - dafür: Fields-Medaille (1994)
- **Skalierungslimiten**
- **numerische Verfahren**
- **...**