18. Symposion mathe 2000
Dortmund, 20. September 2008:

Nicht-zählende Lösungsstrategien von Anfang an – auch und gerade für "lernschwache Rechner"!

Michael Gaidoschik, Wien

Zum begrenzten Nutzen von Vorträgen:

Man lernt nicht dadurch schwimmen, dass jemand darüber referiert, wie man seine Arme und Beine zu bewegen habe.

Halmos, Paul R. (1975)
übersetzt von
Günter Krauthausen

Mein Plan für den heutigen *Vortrag*

- „Rechenschwäche“:
  Ein wichtiges Thema, ein „barbarischer Ausdruck“
- „Zählendes Rechnen“ und Unterricht
- „Strategie-zentrierter Erstunterricht“:
  Einige Vorschläge zur Diskussion

Mein Plan für den heutigen *Vortrag*

- **„Rechenschwäche“:**
  Ein wichtiges Thema, ein „barbarischer Ausdruck“

- „Zählendes Rechnen“ und Unterricht
- „Strategie-zentrierter Erstunterricht“:
  Einige Vorschläge zur Diskussion

„Barbarischer Ausdruck" (© Hegel)

Was ich keinesfalls bestreiten möchte:

- *Kinder unterscheiden sich*

  – auch in den vielfältigen kognitiven, sensorischen, psychisch-motivationalen… Voraussetzungen, die sie für das Lernen der Grundschulmathematik mitbringen.

- Manche Kinder bringen im Bereich dieser Voraussetzungen derart massive Defizite in die Schule mit, dass das Erlernen der Grundschulmathematik dauerhaft erschwert ist.

„Barbarischer Ausdruck" (© Hegel)

Bis zum Beweis des Gegenteils durch Neurologen und Genetiker behaupte ich aber:

- Zumindest die überwiegende Mehrzahl sogenannter „Rechenschwächen" sind nicht Ausdruck eines wie immer gearteten organischen „Defekts"
- MEINE GEGENTHESE:
  Ein Kind ist „rechenschwach", weil und solange es noch nicht besser rechnen gelernt hat.
- „Rechen-Schwäche" ist also nichts anderes als ein problematischer, weil Krankheit suggerierender Sammelbegriff für gescheiterte Lern- und damit auch Vermittlungsprozesse

„gescheiterte Lern- und damit Vermittlungsprozesse“

Am Beispiel „verfestigtes zählendes Rechnen“:

- Gilt als „Hauptmerkmal“ von „Rechenschwäche“ (vgl. Schipper 2005, Lorenz 2003, Lorenz/Radatz 1993 …)
- Im Grunde ein „Widerspruch in sich“: Rechnen beginnt, wo Zählen aufhört
- Alle Kinder sind anfangs „zählende Rechner“ – Warum bleiben es manche?

Damit weiter im Plan…

- „Rechenschwäche“: Ein wichtiges Thema, ein „barbarischer Ausdruck“ ✓
- „Zählendes Rechnen“ und Unterricht
- „Strategie-zentrierter Erstunterricht“: Einige Vorschläge zur Diskussion

Damit weiter im Plan…

- „Rechenschwäche“:
  Ein wichtiges Thema, ein „barbarischer Ausdruck“
- **„Zählendes Rechnen“ und Unterricht**
- „Strategie-zentrierter Erstunterricht“:
  Einige Vorschläge zur Diskussion

„Zählendes Rechnen“ – was denn sonst?

Rechnen Sie doch bitte…

F + H!

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	…
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	…

Aber ohne zu schummeln!

E + J

A B C D E

A B C D E F G H I J K L M N O

„Weiterzählen“

Eine geht noch:

N – M ?

Schwer?

Warum nicht?

„Ableiten“

Wozu das Ganze?

„Buchstabenrechnen" kann verdeutlichen:

- Wer Zahlen *nur als Reihe zum Abzählen* kennt, kann nur „zählend rechnen".
- Ausnahme: Man kann sich Kombinationen *merken.* Aber alle „Sätze" des 1+1/1-1?
- Alternativen ergeben sich nur auf Grundlage von *Einsicht* in Strukturen („Muster") und Zusammenhänge:
  - $M + 1 = N \Leftrightarrow N - M = 1$

Wozu das Ganze?

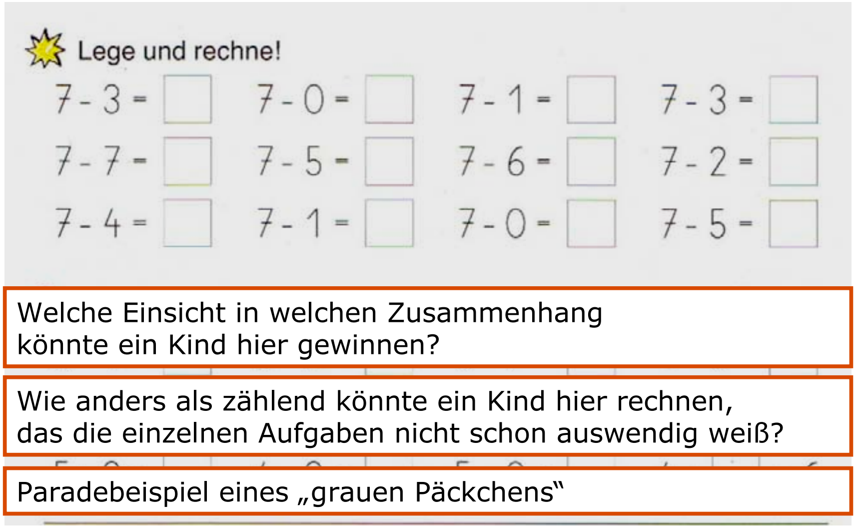
Die Situation vieler SchulanfängerInnen:

- Sie kennen Zahlen – vorwiegend *als Reihe zum Abzählen*
- Was sie *gewohnt* sind, ist zählendes Rechnen
- Sie *merken* sich eine oder andere Kombination - aber alle „Sätze" des 1+1/1-1 – auf dieser Basis?
- *Einsicht* in Strukturen und Zusammenhänge müssen sie erst noch gewinnen

➡ Erst einmal spricht vieles dagegen, dass aus *zählenden* Rechnern *Rechner* werden!

Was passiert jetzt im Unterricht?

Aus: Brunner u.a.:
Zahlenreise 1, 2004

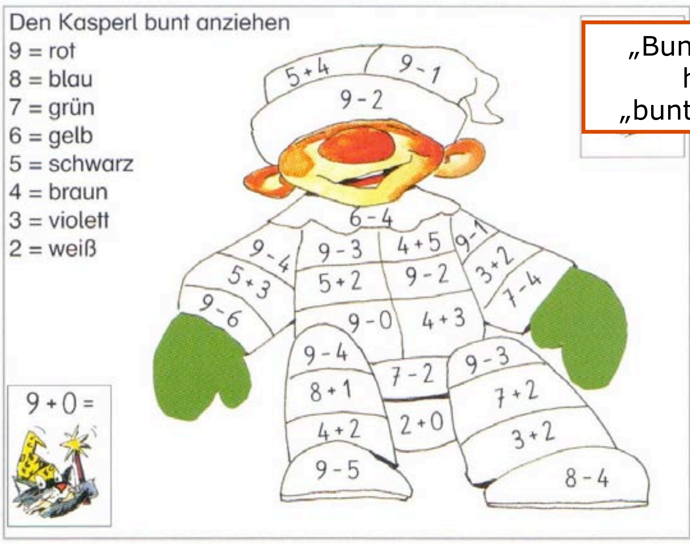


Welche Einsicht in welchen Zusammenhang
könnte ein Kind hier gewinnen?

Wie anders als zählend könnte ein Kind hier rechnen,
das die einzelnen Aufgaben nicht schon auswendig weiß?

Paradebeispiel eines „grauen Päckchens"

Auch das typisch für österreichische Schulbücher:



„Bunter Hund",
hier als
„bunter Kasperl"

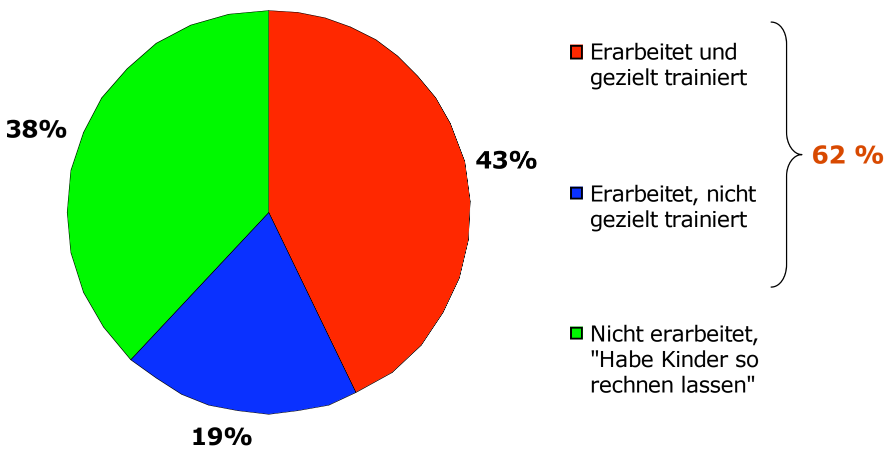
Aus: Eder u.a.:
Mein erstes
Mathematik-
Buch, 2001

Ein wenig Statistik

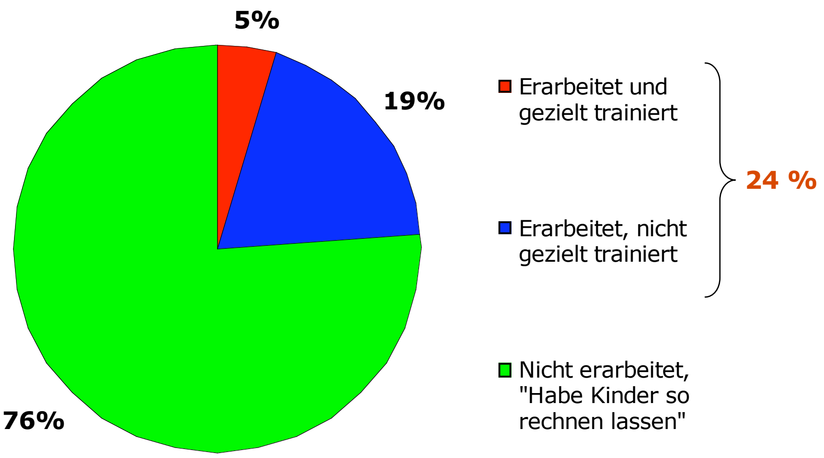
Lehrwerk "Zahlenreise 1"

- Marktanteil in Österreich lt. Verlag im Jahr 2005 etwa 50 %
- Insgesamt 236 Aufgabenpäckchen im ZR 10
- 200 (= 85 %) "graue Päckchen"
- 14 (= 6 %) "bunte Hunde"
- 13 (= 5,5 %) (gutwillig gewertet) "schöne Päckchen"

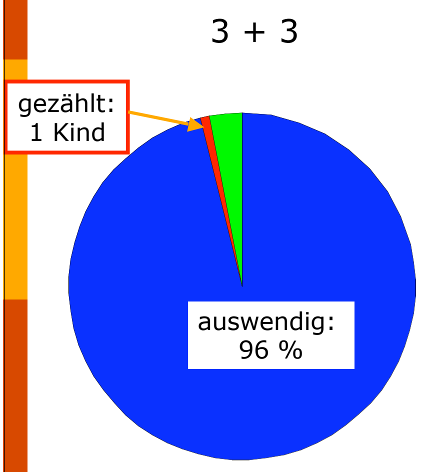
Behandlung der Lösungsstrategie „Weiterzählen" im Unterricht:

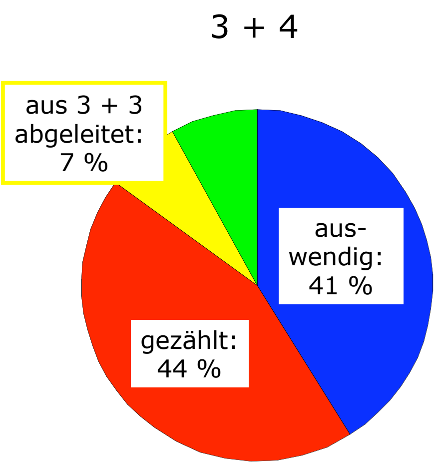


Behandlung der Lösungsstrategie „Verdoppeln plus 1" im Unterricht:



Wie rechnen so unterrichtete Kinder Ende der 1. Schulstufe?





Quelle: Gaidoschik (in Vorbereitung) n = 139

Einige Ergebnisse im Überblick

- Verdoppelungsaufgaben werden von 90 % und mehr auswendig gewusst
- Bei anderen Aufgaben selbst nur im ZR bis 10 ist Auswendigwissen in Minderzahl, z.B.

  10 - 7 ~ 25 % auswendig

- „Ableitungsstrategien" sind selten, auch bei Aufgaben, die dafür günstige Voraussetzungen bieten (wie 3 + 4, 9 – 8).

Einige Ergebnisse im Überblick 2

- Zählstrategien überwiegen beim Großteil der Aufgaben, z.B.

  3 + 6: ~ 47 % zählend

- Etwa 27 % der Kinder waren Ende des ersten Schuljahres auch innerhalb des ZR 10 überwiegend zählende Rechner („zählendes Rechnen" bei mehr als zwei Drittel der nicht-trivialen Aufgaben).
- Etwa 7 % zählen bei 14 von 14 nicht-trivialen Aufgaben

Was folgt daraus?

Nicht-zählendes Rechnen kommt nicht von selbst - schon gar nicht, wenn im Unterricht

a) Rechenstrategien kein Thema sind oder
b) zählende Strategien sogar gefördert / provoziert werden

Außer dem zählenden Rechnen gibt es aber nur

- Auswendigmerken
- „Ableiten"

Zum Auswendigmerken

- In begrenztem Umfang unerlässlich
  auch als Basis für Ableitungen
- In diesem Umfang aber offenbar auch gar nicht das Problem (siehe Verdoppelungen)
- „Reines Auswendigmerken" *sämtlicher* Grundaufgaben kaum machbar – gerade für „lernschwache"!
  - These: Erfolgreiches „Merken" ist Merken im Zusammenhang!
- Selbst wenn es reines Auswendigmerken machbar wäre: Aus *mathematik*-didaktischen Erwägungen nicht wünschenswert!

Dagegen das Schöne am „Ableiten":

Es folgt Ginsburgs (1989) klugem Rat:

> Use the number facts to introduce the child to interesting arithmetic ideas. This meaningful approach will help the child learn what is primary – the ideas – and will also show what is secondary, namely the number facts.

Womit wir angelangt wären bei…

- „Rechenschwäche":
  Ein wichtiges Thema, ein „barbarischer Ausdruck" ✓
- „Zählendes Rechnen" und Unterricht ✓
- **„Strategie-zentrierter Erstunterricht":**
  Einige Vorschläge zur Diskussion

Strategie-zentrierter Erstunterricht: “interesting arithmetic ideas”!

- „Zahlen als Zusammensetzungen aus anderen Zahlen“ (Resnick, Gerster)

  Als Einstieg dafür bestens geeignet: Fingerdarstellungen!

- Rechnen als unterschiedlicher Blick auf Teil-Ganzes-Beziehungen: Zusammensetzungen nutzen!

5 + 4 = 9	9	9 – 5 = 4
4 + 5 = 9	5 4	9 – 4 = 5

5 + _ = 9

4 + _ = 9

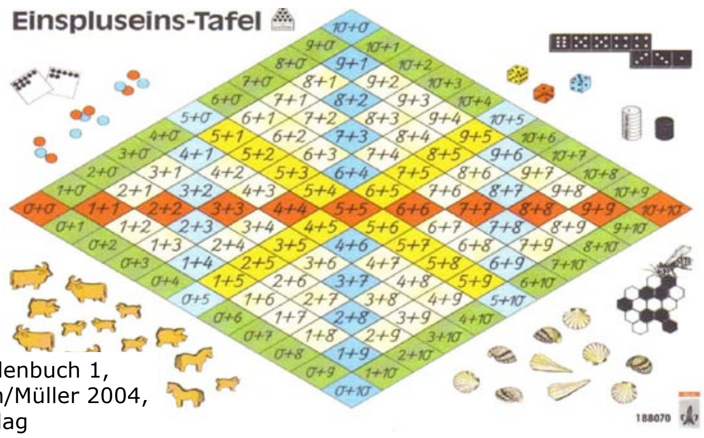
„Zusammensetzungen nutzen“ – auch das ein alter Gedanke…

Eine pedantische Rechenmethodik hat sich bemüht, auch die Zahlen 2, 3 und 4 in vielen Übungen zerlegen zu lassen. Unsere Erfahrungen haben uns gezeigt, dass Übungen wie „2 Äpfel sind’s, einer und noch einer“, wertlos sind, weil sie Wortübungen bleiben auf der Stufe, der die Auffassung der überblickbaren Zahlgrößen noch Schwierigkeiten macht, auf der folgenden aber Langeweile erzeugen, und zwar beides, weil weder dort noch hier das Kind in diesen Übungen einen praktischen Zweck zu entdecken vermag, nur den: du musst es lernen.

(Kühnel 1916, S. 207)

„Strategie-zentrierter Erstunterricht"

- „Einspluseins" und „Einsminuseins" als Netz von Querbeziehungen



Aus: Zahlenbuch 1, Wittmann/Müller 2004, Klett-Verlag

„Strategie-zentrierter Erstunterricht"

- Operatives und produktives Üben:

  Nicht „Lösung" im Vordergrund, sondern der Weg dorthin:

  - Über Strategien diskutieren, sich austauschen
  - Zusammenhänge reflektieren

4 Lege, rechne, vergleiche.

3 + 3 = ...	6 + 4 = ...
4 + 3 = ...	6 + 3 = ...
4 + 4 = ...	7 + 2 = ...
5 + 4 = ...	7 + 3 = ...
5 + 5 = ...	7 + 4 = ...

6 Schöne Päckchen.

5 + 1 = ...	1 + 9 = ...
5 + 2 = ...	2 + 8 = ...
5 + 3 = ...	3 + 7 = ...
5 + 4 = ...	4 + 6 = ...
5 + 5 = ...	5 + 5 = ...

Aus: Wittmann/Müller: Zahlenbuch 1, 2004

„Strategie-zentrierter Erstunterricht"

Meiner Erfahrung nach für manche Kinder als Ergänzung unerlässlich (und für die anderen eine Erleichterung):

- Deutliches Herausarbeiten eines Zusammenhangs als nicht-zählende Rechenstrategie
- Ausreichend Zeit und Gelegenheit zum Entdecken und Vertrautwerden mit je einer Strategie
- Gezieltes Training in der Auswahl einer jeweils passenden Strategie

„Strategie-zentrierter Erstunterricht"

Zumindest für manche Kinder unerlässlich:

- **Deutliches Herausarbeiten eines Zusammenhangs als nicht-zählende Rechenstrategie**
- Ausreichend Zeit und Gelegenheit zum Entdecken und Vertrautwerden mit je einer Strategie
- Gezieltes Training in der Auswahl einer jeweils passenden Strategie

Einsicht und Anwendung

Leon,
Ende
1. Schulstufe

Einsicht und Anwendung

Leon bei 3 + 3

Leon bei 3 + 4

„Zusammenhang als Strategie herausarbeiten“

Am Beispiel „Verdoppeln plus 1“

- „Schöne Päckchen“ als Einstieg

4 Lege, rechne, vergleiche.

3 + 3 = ...	6 + 4 =
4 + 3 = ...	6 + 3 =
4 + 4 = ...	7 + 2 =
5 + 4 = ...	7 + 3 =
5 + 5 = ...	7 + 4 =

Aus: Wittmann/Müller: Zahlenbuch 1, 2004

„Zusam heraus

- *Außerha* einzelne

Etwa so:

Zahlenraum 10

Das ist leicht: 2 + 2 = 4

Das hilft für diese Rechnung: 2 + 3 = ____

Beschreibe, wie das hilft!

____

____

Rechne immer zuerst die leichte Rechnung!
Überlege dann, bei welcher Rechnung diese Aufgabe helfen könnte!

Leichte Rechnung:	Das hilft bei dieser Rechnung:
5 + 5 =	5 + 6 =
3 + 3 =	
6 + 6 =	

Dann etwa auch so:

Suche eine passende Hilfsrechnung!

Rechnung:	Diese Rechnung hilft:
5 + 6 =	5 + 5 =
7 + 8 =	
4 + 5 =	
8 + 9 =	
6 + 7 =	
2 + 3 =	
8 + 7 =	

„Zusammenhang als Strategie herausarbeiten"

- Automatisieren („Blitzrechnen") nicht von Einzelfakten, sondern von *Ableitungs-Zusammenhängen*

Bei Verwendung einer Lernkartei:

2 + 3	3 + 4	4 + 5	5 + 6	usw.
3 + 2	4 + 3	5 + 4	6 + 5	

eine "Lerngruppe"

☞ Jedes Kind erarbeitet eine Gruppe in seinem Tempo.

☞ Erst wenn eine Gruppe (weitgehend) automatisiert, nimmt Kind neue Gruppe dazu.

„Zusammenhang als Strategie herausarbeiten“

Gestaltung der Lern-Kärtchen in der Anfangsphase:

3 + 3 = ?
3 + 4 = ?

3 + 3 = 6
3 + 4 = 7

„Zusammenhang als Strategie herausarbeiten“

Später eher so:

3 + 4= ?

3 + 3 =
3 + 4 =

„Strategie-zentrierter Erstunterricht"

Zumindest für manche Kinder unerlässlich:

- Deutliches Herausarbeiten eines Zusammenhangs als nicht-zählende Rechenstrategie
- **Ausreichend Zeit und Gelegenheit zum Entdecken und Vertrautwerden mit je einer Strategie**
- Gezieltes Training in der Auswahl einer jeweils passenden Strategie

„Ausreichend Zeit für je eine Strategie"

Ruth Steinberg (1985): *Instruction on derived facts strategies in addition and subtraction.*- In: *Journal for Research in Mathematics Education* Vol. 16 (1985), No. 5, S. 337 – 355

- Gezielter „Strategie-Unterricht" anhaltend wirksam
- Strategien auch für „schwache SchülerInnen" erlernbar
- Aber: Üblicherweise 2 bis 4 Unterrichtseinheiten zwischen
  - Erarbeitung der grundsätzlichen Einsicht in eine Strategie wie "Verdoppeln + 1" und
  - selbständiger Anwendung dieser Strategie durch den Großteil der Kinder

„Strategie-zentrierter Erstunterricht"

Zumindest für manche Kinder unerlässlich:

- Deutliches Herausarbeiten eines Zusammenhangs als nicht-zählende Rechenstrategie
- Ausreichend Zeit und Gelegenheit zum Entdecken und Vertrautwerden mit je einer Strategie
- **Gezieltes Training in der Auswahl einer jeweils passenden Strategie**

„Gezieltes Training in der Auswahl"

Vgl. Gerster/Schultz 2000, nach Hope, Lentzinger & Reys 1988:

Immer wieder: Aufgaben nach Strategien sortieren

$\boxed{2 + 2}$ $\boxed{2 + 7}$

$\boxed{4 + 3}$ $\boxed{6 + 2}$

$\boxed{3 + 5}$ $\boxed{1 + 8}$

$\boxed{2 + 3}$ $\boxed{4 + 5}$

„Gezieltes Training in der Auswahl"

Vgl. Gerster/Schultz 2000, nach Hope, Lentzinger & Reys 1988:

Immer wieder: Aufgaben nach Strategien sortieren

um 1 mehr	*um 2 mehr*	*Finger-bild*	*Ver-doppeln*	*Doppelt plus 1*

2 + 2

2 + 7

2 + 2

4 + 3

2 + 7

4 + 3

6 + 2

3 + 5

1 + 8

4 + 5

2 + 3

„Strategie-zentrierter Erstunterricht"

Weitere Anregungen:

Gaidoschik, M. (2007): Rechenschwäche vorbeugen

In Deutschland als

„Rechenschwäche verstehen"
bei Persen…

„primary – the ideas; secondary – the facts“

Christopher, Mitte der

1. Schulstufe,

denkt nach über 6 + 6

„primary – the ideas; secondary – the facts“

Christopher über zählendes Rechnen

Und damit…

Voerst vielen Dank
für Ihre
Aufmerksamkeit!

Fragen, Einwände, Diskussionsbedarf?

michael.gaidoschik@chello.at

www.rechenschwaeche.at