Anselm LAMBERT, Saarbrücken

Zeitgemäße Stoffdidaktik am Beispiel "Füllgraph"

Stoffdidaktische Analyse, Reduktion und Aufbereitung von Mathematik ist eine der zentralen Aufgaben mathematikdidaktischer Forschung zur substantiellen Weiterentwicklung von Mathematikunterricht.

Zeitgemäß sollte dazu der klassische "Höhere Standpunkt" erweitert werden um wesentliche Aspekte kognitiver, epistemologischer und repräsentationaler Natur.

Am Modethema "Füllgraph" wird ein solcher theoretischer Rahmen kurz erläutert und seine fruchtbare Reichhaltigkeit exemplarisch demonstriert.

1. Höhere Standpunkte – gestern und heute

Felix KLEIN hat vor gut 100 Jahren – mit seiner gleichnamigen Vorlesung – „Elementarmathematik vom höheren Standpunkt(e aus)“ als Teil des Lehramtsstudiums in Deutschland etabliert. Die Veranstaltung sollte eine Brücke schlagen zwischen Höherer Mathematik und Schulmathematik. Der höhere Standpunkt bestand im Wesentlichen aus Höherer Mathematik, aber war bereits damals schon angereichert durch psychologische Überlegungen und historisch-genetische Bemerkungen: „Wissenschaftlich unterrichten kann nur heißen, den Menschen dahin bringen, dass er wissenschaftlich denkt, keineswegs aber ihm von Anfang an mit einer kalten, wissenschaftlich aufgeputzten Systematik ins Gesicht springen“ (Klein 1908). Heute ist es angezeigt diese Idee der höheren Standpunkte durch Hinzunahme klassischer und neuerer Erkenntnisse aus Kognitionspsychologie, sowie Semiotik und Epistemologie systematisch zu erweitern, sowohl in Lehrveranstaltungen für Lehramtsstudierende, als auch für die stoffdidaktische Analyse, die damit – über eine mathematische Analyse des Stoffes hinausgehend – subjektive und intersubjektive Bedingungen des Lernens stets mit beinhaltet.

2. Theorien für die Praxis

Um im Schulalltag Gehör zu finden, haben sich mathematikdidaktische Theorien durch Praxisrelevanz auszuweisen. Dies können *demonstrative Theorien* leisten, die erfolgreich kognitive Konflikte bei Lehrpersonen auslösen, wie etwa die Theorie der kognitiven Präferenzen von Inge SCHWANK (Schwank 1998). Dies kann aber auch *ordnenden Theorien* gelingen, die durch ihre proaktive Sprachgebung strukturierte Klarheit im Unterrichtsalltag schaffen helfen. (In Lehrerfortbildungen bewährte) Beispiele dafür sind der Modellbildungskreislauf nach Hans SCHUPP (Schupp 1988), die Merkmale des Wissensumgangs (Exploration, Organisation, Reflexion) nach

Johann SJUTS (Sjuts 2001), die Differenzierung epistemologisch unterscheidbarer Zugänge zur Mathematik (s.u.) oder die detaillierten Analysen von Variablenaspekten nach Günther MALLE (Malle 1993) bzw. Lutz FÜHRER (Führer 1999/2000). Im knappen Rahmen des vorliegenden Beitrags können diese nicht alle vertieft werden; alle bereichern dennoch das Thema „Füllgraph" um interessante Aspekte und ordnen es stoffdidaktisch weiter. *Theoretisch begründete Praxisempfehlungen* schließlich – in Form theoriebasiert ausgearbeiteter Unterrichtsbeispiele – helfen konkret und direkt.

3. Darstellungen und Vorstellungen von Mathematik

In Lehr-Lern-Prozessen sollten mathematische Inhalte auf drei unterschiedlichen, aber aufeinander bezogenen Ebenen dargestellt werden; wesentlich dabei sind die *Übergänge* zunächst von konkreten Handlungen zu Abbildern dieser und dann zum Erkennen und Erfassen von mathematischen Spielregeln in diesen Abbildern, die genau dadurch zu Symbolen werden.

<table>
<tr><th colspan="2">Person A</th><th colspan="2">Person B</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Vorstellung A</td><td colspan="2">EIS-Darstellung</td><td rowspan="4">Vorstellung B</td></tr>
<tr><td colspan="2">Konkretes Objekt und konkrete Handlung</td></tr>
<tr><td colspan="2">Abbildendes (statisches oder dynamisches) Zeichen</td></tr>
<tr><td colspan="2">Symbol (als Zeichen mit Spielregeln) und Operation</td></tr>
<tr><td>„Gemeintes"</td><td>„Gesagtes"</td><td>„Gehörtes"</td><td>„Aufgefasstes"</td></tr>
</table>

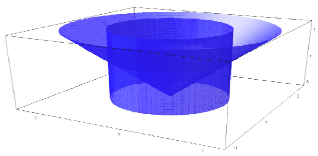
Symbole sind also Zeichen mit Kontexten, die sie mit Regeln auf(ge)laden (haben). Zeichen besitzen somit eine symbolische Kapazität, die im Lernprozess bei den Lernenden verschieden weit ausgeschöpft ist. Epistemologisch lässt sich die Ausprägung eines Zeichen/Symbols als Wort, Bild oder Formelzeichen unterscheiden (vgl. Lambert 2012).

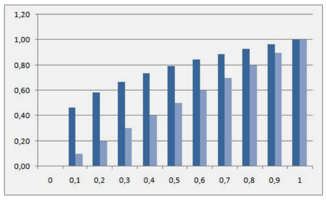
ikonisch	→	**symbolisch, wenn ergänzt um …**
Wort	→	verbal-begriffliche Regeln (VB)
Bild	→	konstruktiv-geometrische Regeln (KG)
Formelzeichen	→	formal-algebraische Regeln (FA)

4. Die E-I-S Darstellungsebenen bei Füllgraphen in Klassenstufe 5/6

- **Enaktiv:** portionsweises Füllen von konkreten Körpern: Kegel und Zylinder gleichen Volumens – Abbildung hier mit DPGraph virtuell erzeugt; Messen der Füllhöhe in Abhängigkeit vom Füllvolumen.
- **Ikonisch:** Fotografieren der Füllstände**;** Tabellieren der Werte, graphische Darstellung als Säulen – hier mit Microsoft Excel erstellt.
- **Symbolisch:** Vergleich der Füllvorgänge anhand der graphischen Darstellung: prädikativ durch Vergleich einzelner Säulen bzw. funk-

tional als ganzheitlicher Füllprozess, gleichmäßig beim Zylinder bzw. zunächst schneller(er), dann langsamer(er) Höhenzuwachs beim Kegel; Diskussion der Frage: Was passiert am Start?





Daneben sollte man in Klassenstufe 5/6 auch Quader enaktiv – ikonisch – symbolisch untersuchen und dazu deren Grundkantenlänge verdoppeln.

5. Funktion in geometrischem Gewande – gestern und heute

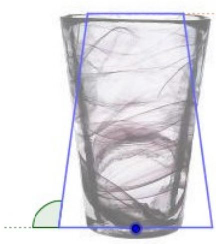
Füllgraphen sind eine 3D-Variation einer zentralen Idee der Meraner Reform des Mathematikunterrichts zu Beginn des 20. Jahrhunderts, Funktionen in geometrischem Gewand zu betrachten und so funktionale Zusammenhänge auch ohne Funktionsterme zu erfassen (vgl. Lambert 2012).

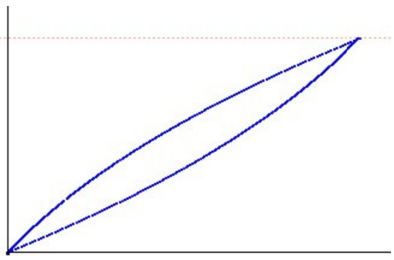
6. Spiralcurricular weiter in Klassenstufe 7/8 – Zugänge berücksichtigt

Eine zeitgemäße Stoffdidaktik hat u.a. die Aufgabe, neben den weitverbreiteten formal-algebraischen mathematischen Beschreibungen auch tragfähige konstruktiv-geometrische und verbal-begriffliche zu liefern. Das Thema Füllgraph lässt sich entsprechend ausbreiten: Interpolation (KG) der Messwerte zu einem kontinuierlichen Funktionsgraph der empirischen Funktion; Fortsetzung des Graphen zur 0 hin (VB); Proportionalität: Wie sieht der Graph zu einem „halben Zylinder“ bzw. „halben Kegel“ aus? (VB) – auch als Vorbereitung des Cavalierischen Prinzips; Diskussion der Steigung des Graphen: Wann hat eine Flasche aus Zylinder und aufgesetztem Kegel keinen Knick im Graphen? (KG & VB); Übergang vom Füllvolumen zur Füllzeit (VB). Eine weitere Fortsetzung (nicht nur) bis zum Abitur ist möglich.

7. Neue Medien und Werkzeuge zeigen mehr – und sogar beweglich

Mit entsprechender Software (hier GeoGebra; nach: www.phzh.ch) lassen sich funktionale Zusammenhänge beweglich und experimentell erfassen.





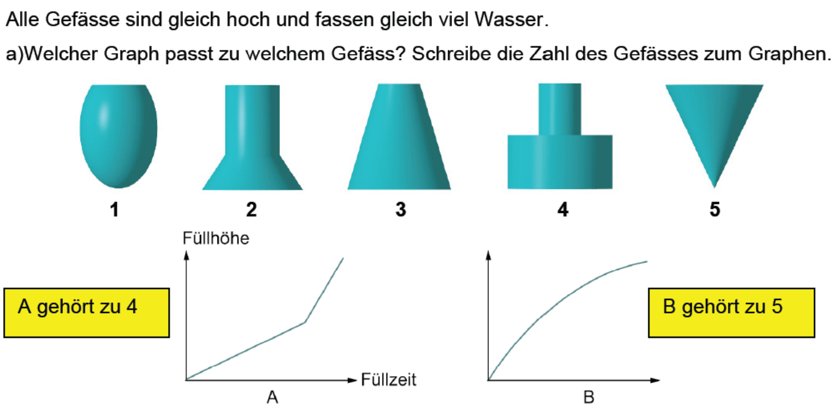
Wie sieht der Füllgraph zu einer Vase gleicher, aber auf dem Kopf stehender Gestalt aus?

Eine verbal-begriffliche und konstruktiv-geometrische Argumentation führt ohne Formeln zu einer mathematischen Begründung: Das gleichmäßige Füllen der Vase mit Wasser geht einher mit einem gegenläufigen Verdrängen von Luft. Eine aus einer Handlung gewonnene Operation zeichnet sich nach Jean PIAGET und Hans AEBLI bekanntlich dadurch aus, dass sie erlaubt die Handlung gedanklich umzukehren. Die Interpretation der Luft als Wasser und des Wassers als Luft und die Inversion der Zeit erklären den punktgespiegelten Graphen inhaltlich als zweifache Achsenspiegelung.

8. Fehler bei Füllgraphen – auch ohne Formeln sehen

Auch manche typische Fehler in qualitativ gewonnenen Füllgraphen (Abb.: www.osrema.ch – nebenbei: die Gefäße fassen als Rotationkörper natürlich nicht – wie dort behauptet – gleich viel Wasser, wenn sie gleich hoch sind) lassen sich ohne formal-algebraische Schlüsse erkennen und vermeiden. Stimmt die Steigung im Ursprung in Schaubild B? Nein: In der singulären Spitze steigt die Füllhöhe im ersten Moment unendlich schnell (VB)!

Stimmt das Steigungsverhältnis in Schaubild A? Ansatz: Das ist durch das Durchmesserverhältnis festgelegt (KG & VB)! Also …



Literatur

Führer, Lutz (1999/2000): Didaktik der Mathematik, Teil 2. Vorlesung. Frankfurt.

Klein, Felix (1908): Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, Teil 1. Vorlesung. Göttingen.

Lambert, Anselm (2012): Enaktiv – ikonisch – symbolisch: Was soll das bedeuten? In Filler, Andreas & Ludwig, Matthias (Hrsg.): Vernetzungen und Anwendungen im Geometrieunterricht. Hildesheim: Franzbecker, 5-32

Malle, Günther (1993): Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Braunschweig: Vieweg.

Schupp, Hans (1988): Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe 1 zwischen Tradition und neuen Impulsen. In MU 34(6), 5–16

Schwank, Inge (1998): Kognitive Mathematik. http://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/kognitive-mathematik, überarbeitet 2002

Sjuts, Johann (2001): Aufgabenstellungen zum Umgang mit Wissen(srepräsentationen). In MU 47(1), 47-60