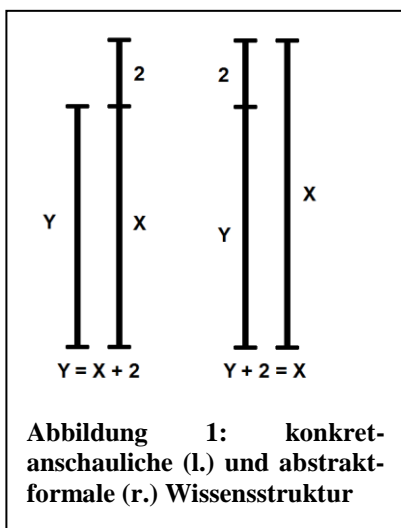


Zur Rolle von Zeichnungen beim algebraischen Modellieren

1. Vom Text zur Formel

Die besonderen Schwierigkeiten beim Modellieren algebraischer Textaufgaben mittels der algebraischen Symbolsprache wurden insbesondere von Malle (1993) ausführlich beschrieben. Dazu stellt er den Übergang von Text zu Formel in einem Dreischritt-Modell dar (vgl. Malle 1993, S. 96ff.). Einen wichtigen Prozessschritt sieht er in der Umwandlung des Textinhaltes von einer konkret-anschaulichen zu einer abstrakt-formalen Wissensstruktur. Erst wenn dies erfolgreich bewältigt wurde, kann der Text unter Beachtung syntaktischer und semantischer Konventionen in eine Formel



übertragen werden. Wird dieser Prozessschritt übersprungen, wird also die konkret-anschauliche Wissensstruktur des Textes direkt in einer Formel verarbeitet, kann dies zu fehlerhaften Formeln führen. Malle (1993, S. 102) nennt als Beispiel dafür den Umkehrfehler, dessen additive Version er anhand einer Schülerbearbeitung zum Text „Ein Knabe ist um zwei Jahre älter als ein Mädchen.“ darstellt. Wird das Alter des Knaben mit X, das Alter des Mädchens mit Y bezeichnet, ergeben sich die in Abbildung 1 zeichnerisch dargestellten Wissensstrukturen. Es ist leicht ersichtlich, wie

eine unzureichende Wissensstruktur, konkreter ein **fehlendes explizites Erkennen von Zahlbeziehungen**, hier zu einer fehlerhaften Formel führt.

Zum Umgang mit unzureichenden Wissensstrukturen schlägt Malle folgende Vorgehensweise vor (vgl. Malle, S.121f.): Schüler sollen zu algebraischen Textaufgaben Zeichnungen erstellen, die erfahrungsgemäß konkret-anschaulicher Natur sind. Aufgabe der Lehrkraft ist es nun, diese konkret-anschaulichen Zeichnungen mit abstrakt-formalen Zeichnungen zu kontrastieren. Der Unterschied zwischen konkret-anschaulichen und abstrakt-formalen Zeichnungen wird besprochen, so dass die Schüler im Laufe der Zeit lernen, selbst abstrakt-formale Zeichnungen zu erstellen. Die vorgeschlagene Vorgehensweise wirft folgende Fragen auf: Warum sind Zeichnungen überhaupt sinnvoll? Warum sind Schüler und Schülerinnen nicht in der Lage, abstrakt-formale Zeichnungen zu erstellen und wie können sie dies erlernen?

2. Zeichnungen im algebraischen Modellieren

Zeichnungen bieten Vorteile, die sie mit der algebraischen Symbolsprache gemein haben. Zunächst werden Zeichnungen dem der Algebra zugrundeliegenden **Analytischen Gedanken** gerecht. In Zeichnungen, genau wie in der algebraischen Symbolsprache, kann eine unbekannte Zahl so behandelt werden, wie eine Zahl die bereits bekannt ist. Weiterhin bieten Zeichnungen genau wie Formeln einen **relationalen Blickwinkel** auf die Aufgabe. Alle Zahlbeziehungen können mit einem Blick erfasst werden. Schließlich ermöglichen Zeichnungen genau wie Formeln eine gewisse **Inhaltsunabhängigkeit**. Wenige symbolische Ausdrücke beschreiben eine große Bandbreite an Aufgaben und Kontexten. Dies ist auch für Zeichnungen möglich, wenn sie einen gewissen Abstraktionsgrad besitzen.

Zeichnungen sind also ein möglicher Schlüssel zu abstrakt-formalem Wissen und damit ein potentiell semiotisches Mittel (vgl. Bartolini Bussi & Mariotti 2008) für Teil-Ganze-Beziehungen und Zahlbeziehungen im Allgemeinen. Gleichzeitig sind Zeichnungen für Schüler durch ihre Anschaulichkeit zunächst viel leichter zugänglich als die algebraische Symbolsprache. Aber die Vorteile von Zeichnungen können von Schülern nur genutzt werden, wenn sie die Verwendung von Zeichnungen erlernt haben. Wie bereits beschrieben, geht Malle (1993) davon aus, dass Schüler zu Beginn des Algebra-Unterrichts nur konkret-anschauliche Zeichnungen erstellen. Es stellt sich die Frage, warum das Erstellen von abstrakt-formalen Zeichnungen nicht bereits vorher erlernt worden ist. Als möglicher Unterrichtsinhalt, an dem abstrakt-formale Zeichnungen noch vor dem Algebra-Unterricht erlernt werden können, bieten sich arithmetische Sachaufgaben an.

3. Zeichnungen im Sachunterricht

In den Bildungsstandards für den Primarbereich (KMK, 2004) finden Zeichnungen nur in der Geometrie Erwähnung. Entsprechend werden in den Lehrplänen der Bundesländer Zeichnungen nur explizit für das Finden von Lösungen zu geometrische Sachsituationen verlangt. Zwar werden in einigen Bundesländern Zeichnungen bzw. Skizzen im Zusammenhang mit Sachaufgaben genannt, die genaue Rolle von Zeichnungen bleibt aber in der Regel allgemein und damit unklar. Dies spiegelt sich auch in Schulbüchern zur Grundschulmathematik wieder, in denen in der Regel Zeichnungen bzw. Skizzen als vorübergehendes Hilfsmittel dienen, die möglichst bald durch Zahlengleichungen ersetzt werden sollen (vgl. z.B. Müller & Wittmann 2006, S. 94).

Deshalb ist es nicht verwunderlich, dass Schüler in weiterführenden Schulen nicht in der Lage sind, Größenbeziehungen in Zeichnungen darzustellen. Dies soll an einem Beispiel eines Interviews mit Erik (5. Klasse) illustriert werden.

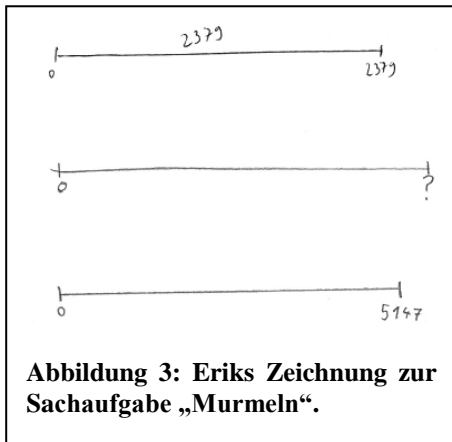


Abbildung 3: Eriks Zeichnung zur Sachaufgabe „Murmeln“.

Erik soll die Aufgabe „Johannes hat 2379 Murmeln. Dann gibt Nora ihm einige Murmeln. Nun hat Johannes 5147 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Nora ihm gegeben?“ visualisieren. Da es sich um große Zahlen handelt, fällt es Erik zunächst schwer, eine Zeichnung zu erstellen. Die Interviewerin gibt ihm den Hinweis, die Zahlen als Linien darzustellen. Erik gibt die Sachaufgabe episodisch wieder, indem er für jeden Satz eine Linie

zeichnet (vgl. Abbildung 3). Die Teil-Ganze Beziehung der Sachaufgabe wird in seiner Zeichnung nicht sichtbar. Erik verfügt zwar über Lösungsstrategien für die Aufgabe. So schlägt er vor, von der 2379 bis zur 5147 weiterzuzählen, oder zu überlegen, wie viel von 5147 weggenommen werden muss, um 2379 zu erhalten. Eine Rechenaufgabe zur Sachaufgabe kann er jedoch nicht nennen.

4. Modellieren von Sachaufgaben mit Hilfe von Zeichnungen

Davydov (1975) hat in einem Unterrichtsversuch gezeigt, dass Schüler durchaus in der Lage sind, Größenbeziehungen in Sachsituationen zu erkennen und zeichnerisch darzustellen und das noch bevor sie erste Erfahrungen mit Zahlen gesammelt haben. Auch Erik bieten sich neue Möglichkeiten, wenn ihm nach Vorbild der von Davydov (1975) verwendeten Diagramme eine Zeichnung (siehe Abbildung 4) zur Verfügung gestellt wird, aus der die Teil-Ganze-Beziehung der Aufgabe ersichtlich wird. Er ist nun nicht nur in der Lage, seinen Strategien „Weiterzählen“ und

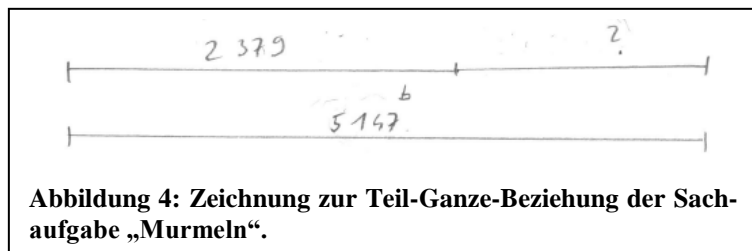


Abbildung 4: Zeichnung zur Teil-Ganze-Beziehung der Sachaufgabe „Murmeln“.

„Wegnehmen“ die beiden Gleichungen $2379 + ? = 5147$ und $5147 - ? = 2379$ zuzuordnen. Auf die Frage hin, welche Rechenaufgabe in den Taschenrechner eingegeben werden kann, um das Ergebnis zu berechnen, findet Erik mit $5147 - 2379 = ?$ auch die dritte Gleichung. Im weiteren Interviewverlauf wendet Erik die in dieser Aufgabe erlernte Strategie aus eigener Initiative bei weiteren Sachaufgaben an.

5. Zurück zur Algebra

Eriks Beispiel zeigt, dass es sich im Hinblick auf die Algebra bereits bei arithmetischen Sachaufgaben anbietet, Schülern abstrakt-formale Wissensstrukturen explizit näherzubringen. Als Vorstufe, insbesondere für rechen-schwache Schüler, wie z.B. Erik, kann den Schülern in Anlehnung an Davydov (1975) anhand von einheitlichen Zeichnungen (wie z.B. das Li-niendiagramm in Abbildung 4) verdeutlicht werden, dass aus $B+C=A$ auch $A-B=C$, $C+B=A$, $A-C=B$ usw. folgt, unabhängig davon, welche Zahlen die Buchstaben repräsentieren. Diese Strategie kann später auf komplexere Zusammenhänge ausgeweitet werden. Bei der Bearbeitung von Sachaufgaben wird dann die Lösung zunächst mit einem Zeichen (Fragezeichen oder auch Buchstaben) bezeichnet. Anschließend erstellen die Schüler gemäß Malles Vorschlag Zeichnungen, die die Größenbeziehungen in den Sachaufgaben wiedergeben. Diese Zeichnungen werden gemeinsam mit den Schülern verglichen, Gemeinsamkeiten herausgearbeitet und so abstrakt-formale Wissensstrukturen verdeutlicht. Schließlich werden zu den Zeichnungen unterschiedliche Gleichungen erstellt und zu jeder Gleichung die arithmetische Lösungsstrategie besprochen.

Diese Vorgehensweise bietet nicht nur wichtige Vorerfahrungen hinsichtlich des algebraischen Modellierens. Gleichzeitig wird dadurch auch Vorarbeit für die Elementarumformungsregeln (vgl. Malle 1993) geleistet, so wie schwachen Schülern eine neue Perspektive auf Sachaufgaben eröffnet.

5. Literatur

- Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh, & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education*, second revised edition. Mahwah: Lawrence Erlbaum.
- Davydov, V.V. (1975). The psychological characteristics of the "prenumerical" period of mathematics instruction. In L. P. Steffe, (Ed.), *Children's capacity for learning mathematics*. *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics*, Vol. VII (pp.109-205). University of Chicago.
- KMK (2005): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004. München, Neuwied: Wolters-Kluwer, Luchterhand Verlag.
- Müller G. N. & Wittmann E. Ch. (2006). *Das Zahlenbuch 2. Schülerbuch*. Bayern. Neubearbeitung. Leipzig: Klett.
- Malle G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*, Vieweg, Braunschweig.
- Rahmenrichtlinien / Lehrpläne für die Grundschule (o. J.). Verfügbar über <http://www.bildungserver.de/Rahmenrichtlinien-Lehrplaene-fuer-die-Grundschule-1660.html> [25.03.2013]