

Martin BRACKE, Kaiserslautern

Zeitprognose beim Ausdauerlaufen – woran erkennt man ein authentisches Modellierungsprojekt

In diesem Beitrag geht es weder um die formale Definition eines authentischen Modellierungsprojekts, noch ist es beabsichtigt weniger gelungene Beispiele für Modellierungsprojekte vorzustellen und zu kritisieren. Gemeinsam ist solchen Fragestellungen oft, dass der Autor für einen gegebenen mathematischen Sachverhalt (z.B. *Exponentialfunktion*) eine Aufgabe konstruiert, die sich mit den entsprechenden Werkzeugen bearbeiten lässt. Die Fragestellung wird dabei so gestaltet, dass sie möglichst realistisch und für Schüler interessant ist, um die Motivation zur Bearbeitung zu erhöhen.

Dieses Vorhaben gelingt meist nur zum Teil: Der Vorteil der Vorgehensweise ist, dass die vorgegebenen mathematischen Werkzeuge benutzt und daher die Unterrichtsplanung vereinfacht wird. Die Fokussierung auf wenige definierte mathematische Techniken hat jedoch eine sehr stark spezifizierte Fragestellung und oft die vollständige Angabe von (konstruierten) Daten zur Folge. Durch alternative Schülerlösungen, Recherche anderer Daten und kritischem Hinterfragen der Fragestellung können aber Probleme auftreten: Es kann zu einem Authentizitätsverlust und damit zu einer gesenkten Motivation kommen. Damit ist dieser Aufgabentyp zwar für den Mathematikunterricht geeignet, der künstliche Realitätsbezug wirkt jedoch kontraproduktiv und es scheint ehrlicher, ihn einfach wegzulassen.

Im Folgenden wird beispielhaft gezeigt, welche vielfältigen Möglichkeiten eine reale, offen gestellte Fragestellung für die Bearbeitung durch Schüler und auch Studierende bietet. Dabei werden nicht wie oft üblich durch die Auswahl der Daten oder die Art der Frage Lösungswege vorgezeichnet, vielmehr werden die Schüler tatsächlich zu Modellierern und erarbeiten mit den ihnen zur Verfügung stehenden Kenntnissen eigene Lösungen!

1. Problemstellung: Zeitprognose beim Ausdauerlaufen

Anhand eines konkreten Beispiels wird nachfolgend das Potential der Frage nach einer guten Zeitprognose für Ausdauerläufe vorgestellt. Es geht um den TSG Halbmarathon (21097,5m; (+215m/-219m) Höhenunterschied), welcher jährlich in Kaiserslautern veranstaltet wird und für den GPS-Daten im Internet zur Verfügung stehen (TSG, 2013). Wichtig ist hierbei, dass es sich um eine profilierte Strecke handelt!

In diesem Zusammenhang können viele verschiedene Fragen mit Zugang auf unterschiedlichem mathematischem Niveau, gestellt werden, z.B.

- Welche Endzeit kann ein Hobbyläufer erwarten, der seine aktuelle Leistungsfähigkeit für andere Distanzen (z.B. 5km, 10km) kennt?
- Wie sollte ein Läufer sich das Rennen einteilen?
- Ist die Zeit abhängig von der Laufrichtung, d.h. in welcher Richtung sollte der Kurs für ein schnelles Rennen durchlaufen werden?

Die vorgestellte Problemstellung wurde bei unterschiedlichen Gelegenheiten (Modellierungstagen und -wochen, Wettbewerb, Seminar) mit verschiedenem zeitlichen Aufwand von Schülern und Studierenden erfolgreich und kreativ bearbeitet. Im nächsten Abschnitt werden überblicksartig verschiedene Herangehensweisen und Überlegungen vorgestellt. Damit soll die Vielfalt und unterschiedliche Komplexität der mathematischen Werkzeuge, mit denen das Problem bearbeitet werden kann, aufgezeigt werden.

2. Gedanken zur Mathematischen Modellierung

Jüngere Schüler ab Klassenstufe 5 werden oft zu der Vereinfachung kommen, das Höhenprofil der Strecke sowie eine Ermüdung des Läufers außer Acht zu lassen. Werden dann Beispiele aus dem Schülerumfeld der Art „Onkel Max lief vor zwei Wochen einen 10km Volkslauf in 40:45 Minuten“ gesammelt, kommt beim Hochrechnen der Zeit damit das Umrechnens von Einheiten ins Spiel: Reden wir hier von 40,45 Minuten oder sind es 40,75 Minuten? Was sind eigentlich 75,95 Minuten? Kurz: Wie rechnet man systematisch und korrekt um? Anschließend ist mathematisch das Arbeiten mit dem Dreisatz gefragt, wobei auch ohne vorherige systematische Einführung die Schüler auf die richtige Rechnung kommen. Dabei kann der Betreuer durch Bezug auf den Problemkontext den Schülern helfen, ohne gezielt das Vorgehen vorzugeben. So ist die Frage nach der Plausibilität der Rechnung sehr hilfreich. Durch Recherche nach Zeiten eines Läufers für verschiedene Streckenlängen können die Schüler systematische Fehler selbst entdecken. Im Anschluss können die Vereinfachungen des Modells diskutiert werden, indem man etwa die berechneten Zeiten mit gelaufenen Zeiten in Bezug setzt (hier kann mit Höhenprofil und/oder Ermüdung argumentiert werden). Durch eigene Recherchen werden Schüler auf bereits bekannte Formeln zur Zeitprognose stoßen. Ein oft benutztes Modell (siehe (Riegel, 1977)) stellt einen exponentiellen Zusammenhang zwischen verschiedenen Distanzen und den aktuellen Weltrekorden fest:

$$Zeit_2 = Zeit_1 \times \left(\frac{Strecke_2}{Strecke_1} \right)^{1,07}$$

Nach Interpretation und grafischer Darstellung der Formel sollte die Frage auftauchen, ob bzw. warum ein Hobbyläufer hiermit für sich selbst stimmig

ge Zeitprognosen ermitteln kann, obwohl er sich außerhalb des Bereichs von Weltrekorden bewegt. Dazu kann man reale Laufergebnisse in Bezug zu obiger Formel setzen und die Differenz zum Ideal analysieren und interpretieren. Muss vielleicht der Exponent abgeändert werden? Wie könnte so eine Änderung aussehen, hängt sie von der Leistungsfähigkeit ab?

Es gibt wenige Vorschläge, die das Profil einer Laufstrecke einbeziehen. Einer davon ist die Idee aus (Greif, 2006): Hier wird die Laufstrecke virtuell für jeden positiven Höhenmeter verlängert (+ 6m) bzw. für jeden negativen verkürzt (-2m). Für die so ermittelte virtuelle Streckenlänge wird dann mittels Dreisatzes eine Zeitprognose berechnet. Der Faktor *Ermüdung* wird zunächst nicht einbezogen. Wieder kann man das zugrunde liegende Modell an sich hinterfragen: Ist das Konzept der virtuellen Streckenlänge sinnvoll? Schüler kommen schnell darauf, dass nicht allein die Höhendifferenz sondern auch die Steigung eine wichtige Rolle spielt. Hier helfen oft eigene Experimente mit Pulsmesser und Testläufen an verschiedenen Steigungen. Dies ist zwar zeitaufwändig, trainiert aber auf der anderen Seite das Erfassen sowie die Darstellung, Auswertung und Interpretation von Daten. Ist die Formel von Riegel/Steffny bereits bekannt, kann über eine Verbindung mit der virtuellen Streckenlänge nach Greif nachgedacht werden.

3. Erweiterungsmöglichkeiten für Oberstufe und Studium

Schüler der Oberstufe oder Studierende können auf die Idee kommen, dass beim Ausdauerlaufen für eine geringe Endzeit eine möglichst konstante Leistung erbracht werden sollte. Damit stellt sich die Frage, wie bei konstanter Leistung die Laufgeschwindigkeit von der Steigung abhängt. Antworten kann man z.B. in (Minetti et al., 2002) oder durch entsprechende eigene Experimente finden. In (Daniels, 2005; Daniels et al, 1978) findet man ein Modell, welches die Dauer eines Laufs zu der vom Läufer abrufbaren konstanten Leistung in Bezug setzt. Zusammen mit der zuvor beschriebenen steigungsabhängigen Geschwindigkeit (bei konstanter Leistung) kann damit für einen profilierten Lauf eine sehr realistische Zeitprognose erstellt werden. Mathematisch werden hier (numerische) Integration und numerische Nullstellenbestimmung benötigt. In guter Näherung kann man aber auch von stückweise linearen Streckenprofilen ausgehen und so mit Hilfe von endlichen Summen einen Zugang eröffnen, der auch Schülern offen steht. Im Anschluss soll die folgende Tabelle (Format hh:mm:ss) einen Eindruck davon geben, welche Zeitprognosen die verschiedenen Ansätze für den TSG Halbmarathon erlauben:

10km	„Dreisatz“	Riegel/Steffny	Greif & Riegel (Daniels/Minetti	Realer Lauf
36:00	1:15:57	1:20:01	1:23:29	1:21:44	1:21:01

Unabhängig von der Komplexität der Modelle sollte die Zeit aufgebracht werden, die ermittelten Prognosen mit den Schülern zu besprechen und Annahmen und Grenzen der Modelle zu beleuchten. So wird man Faktoren wie Bodenbeschaffenheit (Asphalt, Waldboden, Sand, Matsch), Wetter (Temperatur, Wind, Luftfeuchtigkeit) oder Tagesform meist nicht berücksichtigen können – was nicht heißt, dass die Prognosen nicht hilfreich sind, aber zumindest eine achtsame Anwendung und Interpretation nahelegt.

Wenn man die Ergebnisse mit Läufern diskutiert und auf ihre Anwendung überprüft, treten weitere Fragen auf: Welche Auswirkung hat es, wenn die vorhergesagte Zeit zu hoch/zu niedrig ist? Sind Abweichungen in beide möglichen Richtungen gleichwertig? Soll sich der Läufer nach einer Durchschnittsgeschwindigkeit richten oder kann man ihm sogar einen Geschwindigkeitsverlauf vorgeben? Basieren die Streckeninformationen auf GPS-Daten? Die Korrektur von GPS-Daten ist komplex und kann leicht ein selbstständiges Projekt werden!

4. Fazit

Es wurde ein offenes Modellierungsprojekt vorgestellt, das ohne eine zu restriktive Zeitvorgabe auf sehr unterschiedlichen mathematischen Niveaus diskutiert und bearbeitet werden kann. Die Erfahrung zeigt, dass das Projekt die Modellierer zu eigenen Experimenten, weiteren Recherchen und Fragestellungen einlädt und sehr reichhaltige mathematische Erfahrungen ermöglicht. Dabei soll die dem Leser vielleicht fehlende Konkretisierung von Lösungen und erforderlichen Grundkenntnissen dazu anregen, selbst in die Modellierung dieses Projekts einzutauchen, um anschließend aus einem ganz anderen Blickwinkel in die Arbeit mit Schülern zu gehen!

Literatur

- Daniels, J. (2005): Daniels' Running Formula (2nd edition). Champaign (IL): Human Kinetics.
- Daniels, J., Fitts, R. & Sheehan, G. (1978): Conditioning for Distance Running – the Scientific Aspects. New York: Wiley & Sons, Inc.
- Greif, P. (2006): <http://www.greif.de/hoehenmeter-laufzeit-rechner.html>. Zuletzt aufgerufen am 25.03.2013.
- Minetti, A., Moia, C., Roi, G. S., Susta, D. & Feretti, G. (2002): Energy cost of walking and running at extreme uphill and downhill slopes. J. Appl. Physiology 93: pp. 1039-1046.
- Riegel, P.S. (1977): Time predicting. Runner's World Magazine 12(8).
- TSG (2013): <http://www.gpsies.com/map.do?fileId=mcykjsjeefuhqtuu>. Zuletzt aufgerufen am 25.03.2013.