

Heike HAHN, Regina Dorothea MÖLLER, Erfurt

Rechenkompetenz unter der Perspektive der Passung von verschiedenen Repräsentationen

1. Einleitung

In der Diskussion um die Gestaltung von Lehr-Lern-Prozessen wird der Begriff der Passung mit verschiedenen Perspektiven auf Schule und Unterricht verwendet. Die pädagogische Passung betrifft die notwendigen Unterstützungen für einen optimalen Schulerfolg für jeden Schüler, unabhängig von seiner Herkunft. Doch trotz des Credo für Chancengleichheit wird der Schulerfolg immer noch stark durch die Herkunft eines Schülers bestimmt. Die didaktische Passung betrifft die Lernangebote für die individuellen kognitiven Strukturen der einzelnen Schüler. Aus didaktischer Sicht geht es darum, Lernangebote zu unterbreiten, die im Schwierigkeitsgrad, in den geforderten Denkweisen sowie in den erforderlichen Kenntnissen und Fähigkeiten zum Schüler passen.

In Bezug auf die Inhalte im Mathematikunterricht rückt eine weitere Perspektive der Passung in den Fokus. Insbesondere mit Blick auf die schriftlichen Rechenverfahren ist die Passung zwischen verschiedenen Repräsentationsebenen für die Lernerfolge der Schüler von erheblicher Bedeutung. In diesem Beitrag wird exemplarisch die Subtraktion vorgestellt; vergleichbare Überlegungen können auch zur Division angestellt werden.

2. Kontext

Im Prozess der Ausbildung der Rechenkompetenz als ein Ziel des arithmetischen Mathematikunterrichtes spielen verschiedene Rechenverfahren eine Rolle: das mündliche Rechnen (oder Kopfrechnen), das halbschriftliche Rechnen (oder gestützte Kopfrechnen) und das schriftliches Rechnen; jedes Rechenverfahren hat spezifische Ziele. Für die Subtraktion kann festgestellt werden, dass es sowohl beim halbschriftlichen als auch beim schriftlichen Rechnen verschiedene Vorgehensweisen gibt. Beim halbschriftlichen Rechnen ist es erklärtes Ziel, dass Schüler mehrere Rechenweisen kennen und auch nutzen. Beim schriftlichen Subtrahieren geht es darum, ein Verfahren zu beherrschen.

Allgemein können für die Erarbeitung einer Operation bestimmte fachdidaktische Prinzipien ausgemacht werden:

- die Operationen sollten aus Handlungen gewonnen werden (Operationen sind Abstraktionen von Handlungen)

- zu einer Operation gibt es verschiedene Handlungskontexte (Klassifikationstypen), die zur Operation führen (dynamische und statische)
- Unterstützung des Erarbeitungsprozesses durch Material
- Verdeutlichung des Zusammenhangs zwischen der Materialhandlung und der symbolischen Notation
- Kommentierung des Vorgehens beim Rechnen.

Halbschriftliche Subtraktion

Zur Erarbeitung der Vorgehensweisen bei der halbschriftlichen Subtraktion werden i.a. verschiedene Materialhandlungen unternommen, z.B. mit Rechengeld, Dienes-Material, an der Hundertertafel oder mit dem Hunderterrechenrahmen. Notiert man für eine konkrete Subtraktionsaufgabe, z.B. 53-27, die Rechnungen, die sich in Folge der Materialhandlungen ergeben, sind unterschiedliche Rechenstrategien möglich: Rechengeld oder Dienes-Material führen v.a. zum schrittweisen Rechnen. Beim Wegnehmen der Einer ist ein Geldwechsel bzw. ein Tausch der Zehnerstange erforderlich (wobei die Entbündelung als Grundhandlung des Stellenwertprinzips nicht notiert wird). Stellenweises Rechnen würde sich bei Aufgaben ohne Übertrag anbieten. Die Verwendung der Hundertertafel oder des Rechenrahmens führen v.a. zum schrittweisen Rechnen, wobei die Richtung klar sein muss.

Es wird offensichtlich, dass Materialhandlungen zu bestimmten halbschriftlichen Rechenweisen führen. Fraglich ist, ob Schüler z.B. durch Handlungen zum Vereinfachen (über das gleichsinnige Verändern) kommen. Materialhandlungen führen in der Regel zum dynamischen Klassifikationstyp des Wegnehmens, zum Ergänzen würde eine Materialhandlung im Kontext des Ausgleichens führen, d.h. bei einer additiven Interpretation der Subtraktion. Statische Klassifikationstypen wie das Vergleichen legen eine Veranschaulichung mit Material kaum nahe, vielleicht sind sie deshalb für Schüler schwerer verständlich als andere Klassifikationstypen.

Ziel des halbschriftlichen Rechnens ist eine flexible Nutzung verschiedener Rechenweisen, je nach Aufgabentyp. Für den Unterrichtsprozess lassen sich nun verschiedene Positionen vertreten:

Verschiedene Strategien werden besprochen, es schließen sich Übungen zu deren bewusster Nutzung an. In weiteren Festigungsphasen geht es um die flexible Nutzung der verschiedenen Strategien, wobei dies leistungsstarken Schülern gelingt, während leistungsschwache meist eine Rechenweise kennen und nutzen (v.a. schrittweises Rechnen).

Grundsätzlich ergibt sich die Frage, ob die didaktische Position des handlungsorientierten und anschauungsgebundenen Vorgehens nur für ausgewählte Rechenstrategien gilt bzw. inwiefern die Materialhandlung mit der notierten Rechnung übereinstimmt.

Schriftliche Subtraktion

Auch für das schriftliche Verfahren der Subtraktion gibt es verschiedene Möglichkeiten des Vorgehens. Anhand beispielhafter Aufgabenkontexte wird deutlich, dass Rechenrichtungen eine Folge der Situation sind:

Aufgabe 1: Alex hat ein Sparbuch, auf das er sein Geburtstagsgeld immer eingezahlt hat. Er hat nun schon 417.- € gespart. Nun erfüllt er sich einen lange gehegten Wunsch und kauft sich ein Mountainbike für 249.- €. Wie viel Geld hat Alex nun noch auf seinem Sparbuch?

Aufgabe 2: Hannes hat ein Sparbuch, auf das er sein Geburtstagsgeld immer einzahlt. Er hatte bis jetzt schon 249.- € gespart. Auch das Geburtstagsgeld seines letzten Geburtstages zahlt er wieder ein. Nun ist auf dem Sparbuch die stolze Summe von 417.- € zu lesen. Wie viel Euro hat Hannes zu seinem letzten Geburtstag bekommen?

Die erste Aufgabe führt zum Abziehverfahren, die zweite zum Ergänzen. Aus fachlicher Perspektive ist die Passung zwischen Sachkontext und Rechenverfahren für die unterrichtliche Erarbeitung wichtig.

3. Theoretischer Bezug

In diesem Zusammenhang ist die Frage nach dem Verstehen des Rechenvorganges von Bedeutung. Zu den bekannten Merkmalen des Verstandens habens zählen die aktive, um Verständnis bemühte Person, wobei der Vorgang des Verstehens als Wechselwirkung zwischen einem zu verstehenden Sachverhalt und der Person zu begreifen ist (Aebli 1980, S. 182). Weiter erfordert Verstehen ein Anknüpfen an Vorwissen, um den zu verstehenden Sachverhalt in ein System vorhandener Bedeutungen bzw. subjektiven Wissens (Handlungs-, Begriffs- oder Prozesswissen) einzuordnen. Verstehensprozesse sind von den aufnehmenden Wissensstrukturen der Person abhängig, d.h. die „prinzipielle Vorwissenbezogenheit“ ist zentral für das Verstehen (Reusser & Reusser-Weyeneth 1994, S. 17). Weiter ist Verstehen ein Prozess der Repräsentationsfindung, denn eine Erkenntnisgewinnung gleicht einem Prozess, dessen Kern im Finden oder Überwechseln zu einer geeigneten Repräsentation besteht. Das bedeutet, dass für den zu verstehenden Sachverhalt oder die Gegebenheit eine geeignete „wahrnehmungsfreundliche“ Darstellung, eine kognitive Repräsentation gefunden werden muss, die es einer Person ermöglicht, den Sachverhalt oder die Gegebenheit im Kontext bekannter Wissensstrukturen zu erschließen (Reusser & Reusser-Weyeneth 1994, S. 21).

Karmiloff-Smith modelliert das Verstehen als Erwerb von Kompetenzen in einer Unterscheidung von Verstehen und Automatisierung. Verstehen und Automatisierung konstituieren einen Verstehensprozess. Nach dieser Theorie wird Verstehen durch Automatisierung und Verstehen erworben: Verstehen wird durch eine Folge repräsentationaler Umstrukturierungen von Modulen oder Prozeduren in explizit verfügbare Prinzipien gedeutet. Re-

präsentationale Umstrukturierungen sind inhaltsbezogene Fähigkeiten. Bezogen auf die Behandlung von Rechenweisen ist es das Ziel, ein grundsätzliches Verständnis für die Abfolge und Logik der Rechenschritte im Kontext des Wissens über unser Zahlensystem und die Rechenoperationen bei den Lernenden zu sichern.

Für das Verstehen spielen dabei die verschiedenen Repräsentationsebenen und ihre Beziehungen zueinander eine wichtige Rolle für die Ausprägung von Verständnis. Verstehen lässt sich also mit inhaltsgebundenen (im Unterschied zu Piaget) repräsentationalen Umstrukturierungen erklären. Damit die Umstrukturierungen „störungsfrei“ erfolgen können, ist es für den Lehrer wichtig, auf eine Passung zwischen verschiedenen Elementen der Lernprozesses zu achten: Aufgabe und Materialhandlung, Materialhandlung und Veranschaulichung, Veranschaulichung bzw. Materialhandlung und Kommentar (Sprache) sowie die Notation mittels mathematischer Symbolik.

Es wird auch deutlich, dass Verstehen und Sprache in einem engen Wechselverhältnis stehen. Aufgabe des Unterrichts ist es, entsprechende Prozesse anzuregen, indem auf die inhaltliche Passung der Ebenen geachtet wird.

4. Schlussfolgerungen für den Unterricht

Aus den bisherigen Ausführungen lassen sich einige Empfehlungen für die Unterrichtsgestaltung ableiten. Da die Konstruktion interner Vorstellungsbilder ein individueller Vorgang ist, ergibt sich unter didaktisch-methodischer Perspektive die Notwendigkeit zu prüfen, in welchem Ausmaß in der Erarbeitungsphase der halbschriftlichen bzw. schriftlichen Rechenverfahren Aktivitäten zum Wechsel der Repräsentationsebenen nötig sind. Weiter wird ein Verständnis für die Schritte beim Rechnen unterstützt, wenn praktisch erfahrene Handlungen und wahrgenommene Veranschaulichungsformen in ihrer Beziehungshaltigkeit und Adäquatheit zur symbolischen Notation und sprachlichen Begleitung beachtet werden. Es geht um deren Passung. Schließlich sind Verständnis und Fertigkeit nicht identisch. Die Sicherung von Verständnis ist für die Phase der Erarbeitung nötig, wird jedoch kaum zur Automatisierung führen. Für die Erreichung dieses Ziels Übungsprozesse unverzichtbar.

Literatur

Aebli, H. (1980): Denken. Das Ordnen des Tuns. Bd. I: Kognitive Aspekte der Handlungstheorie. Stuttgart: Klett

Karmiloff-Smith, A. (1992): Beyond modularity: a development perspective on cognitive science. Cambridge u.a.: MIT Press

Reusser, K. & Reusser-Weyeneth, M. (Hrsg.) (1994): Verstehen. Psychologischer Prozess und didaktische Aufgabe. Bern u.a.: Verlag Hans Huber