Andreas VOHNS, Klagenfurt

Algebraisieren & Geometrisieren: Globale Ideen der Analytischen Geometrie?

Wenn man die Forderung erhebt, Mathematikunterricht in der Oberstufe müsse in allen Lernbereichen „an fundamentalen Ideen orientiert sein“(Borneleit, Danckwerts et al. 2001, S. 81), so wirft dies wenigstens zwei Fragen auf: Welche Ideen sollen dies sein und welche Konsequenzen ergeben sich aus einer Orientierung an diesen Ideen?

Wenn man, wie etwa Peschek 2005 „globale Ideen“ als Ausgangspunkte für Reflexionsprozesse begreift, in denen es darum geht, „Beziehungen zwischen lokalen mathematischen Konzepten wie auch zu Anwendungen (Lebenssituationen) und zum Alltagsdenken herzustellen, lokale Konzepte in einem Gesamtzusammenhang zu positionieren und in diesem zu bewerten“(S. 65), dann wird Orientierung des Unterrichts an globalen Ideen beinahe zwangsläufig ein wechselseitiger Anpassungsprozess: Man kann Inhalte auf gewisse Ideen hin fokussieren oder aber Ideen (bzw. deren Verständnis) den tatsächlichen curricularen Gepflogenheiten anpassen (vgl. ausführlicher Vohns 2010). Solange man weder die globalen Ideen noch die curricularen Gepflogenheiten als sakrosankt ansieht, bleibt allerdings die Frage offen, in welche Richtung solche Anpassungsprozesse vornehmlich zu verlaufen haben und inwiefern aus der Herstellung einer höheren Passung überhaupt ein wünschenswerter curricularer Zustand gefolgert werden kann. Einige Phasen eines solchen Anpassungsprozesses wurden im Vortrag für die Analytische Geometrie vorgestellt; allerdings weitgehend ergebnisoffen bezüglich der letzten Frage.

Dazu wurden mit „Algebraisieren“ und „Geometrisieren“ zunächst zwei Termini ausgewählt, die in der fachdidaktischen Auseinandersetzung mit der Analytischen Geometrie mehrfach implizit oder explizit als Vorschläge für globale Ideen eingebracht werden. In „nullter Näherung“ könnten diese Termini die Möglichkeit beschreiben, „Sachverhalte“ des einen Themenbereichs (z.B. geometrische Sachverhalte) mit „Mitteln“ des anderen Themenbereichs (z.B. algebraischen Mitteln) darzustellen und zu verarbeiten. Bereits eine sehr oberflächliche Konfrontation mit typischen Inhaltskatalogen der Analytischen Geometrie in der Oberstufe lassen allerdings erkennen, dass dem „Algebraisieren“ deutlich mehr Aufmerksamkeit gewidmet wird, als dem „Geometrisieren“. Im Vortrag wurde anhand der Verdichtung charakterisierender Merkmalszuschreibungen in einschlägigen Textstellen (Beutelspacher & Danckwerts et al. 2011, S. 121ff; IDM/AECC-M 2009, S. 15; Tietze, Klika, Wolpers 2000, S. 70f, Wittmann 2003, S. 47) herausgearbeitet, dass dies auch an einer nahezu diametral unterschiedlichen Wahrnehmung des Geometrischen und Algebraischen liegt (s. Abbildung 1).

Geometrisch	**Algebraisch**
Zeichnen	Rechnen
Anschauung, Visualisierung	Darstellung, Beschreibung
Heuristisch, Hilfsmittel	Beweis, Lösung
Einsicht gewinnen	Blind sein
Verstehen	Wissen absichern
Menschlich	Maschinell

Abbildung 1

Zugespitzt lässt sich formulieren: Mit „Algebraisieren" wird in der Regel das „eigentliche Anliegen"(Tietze, Klika, Wolpers 2000, S. 71) der Analytischen Geometrie beschrieben und dieses wird als Wunsch konzeptualisiert, sich möglichst weitgehend von „anschaulich-geometrischen Betrachtungsweisen"(IDM/AECC-M 2009, S. 15) zu lösen, um symbolische Operieren zu können, d.h. „prinzipiell alle Aussagen durch Rechnen"(Beutelspacher, Danckwerts et al. 2011, S. 122) beweisen zu können. Während „Algebraisieren" damit einen (weiteren) Mathematisierungsschritt darstellt, wird „Geometrisieren" eher als heuristisches Hilfsmittel, als Veranschaulichung, als Mittel des besseren Verstehens und der erleichterten Kommunikation über abstrakte algebraische Sachverhalte konzeptualisiert – oder kurz: als Didaktisierungsschritt.

Im Vortrag wurde aus Zeitgründen im Folgenden nur mehr der Passung der obigen Konzeptualisierung des „Algebraisierens" zum derzeitig üblichen Curriculum in Analytischer Geometrie nachgegangen. Dabei wurde problematisiert, dass „Algebraisieren" als weitgehende Lösung vom geometrischen Kontext mit dem Ziel, bislang präformal geometrisches Arbeiten möglichst flächendeckend durch Rechnen abzulösen, auf wenigstens der Passungsprobleme relativ zum etablierten Curriculum stößt:

- eine (nahezu vollständige) Beschränkung auf lineare Gleichungen,
- die Dominanz vektorieller Darstellungsformen (samt Persistenz zunächst koordinatenfreier, geometrischer Vektorkonzepte),
- den Aufgabenkanon, mit seinem Schwerpunkt im systematischen Durchexerzieren weitgehend disjungiert behandelter Lage- und Abstandsbeziehung linearer geometrischer Objekte, zumeist in (partiell) prä-algebraisierter Form.

Tatsächlich passt eine Charakterisierung des „Algebraisierens“, wie sie oben gegeben wurde, mindestens genauso gut, wenn nicht besser, auf eine vektorfreie Koordinatengeometrie, die ihren Schwerpunkt gerade *nicht* in linearen Gleichungen hat, sondern sich gerade auf nichtlineare Gleichungen als gleichberechtigte geometrische Konstruktionsmöglichkeit konzentrieren würde (etwa den historischen Wurzeln bei Descartes und Fermat folgend).

Wenn man sich dennoch auf lineare Gleichungen beschränken möchte, so müsste man dies wohl als bewusste, pragmatische oder exemplarische Entscheidung offen legen. Zudem erschiene eine Konzentration auf vektorielle Darstellungsformen dann nachvollziehbarer, wenn der Gedanke einer eines möglichst flexiblen Wechsels zwischen geometrischer und algebraischer Ebene gegenüber dem vermeintlichen Wunsch möglichst weitgehender Lösung vom geometrischen Kontext in den Vordergrund gerückt würde. „Algebraisieren“ könnte dann für einen bestimmten Zugang zum Anschauungsraum stehen, der im Vortrag als *gezielt geometrisch enthaltsame Erkundung des Anschauungsraumes* bezeichnet wurde, in deren Zentrum folgende Leitfragen stehen könnten:

Welche geometrischen Sachverhalte kann ich beschreiben und bearbeiten,

- *wenn ich die quantifizierte relative Lage eines Punktes (bezüglich eines willkürlich gewählten Basispunktes) schon für alles halte, was ich über einen Punkt wissen muss (kann),*
- *ich von jedem geometrischen Gebilde nicht mehr für wissenswert erachte, als welche Punkte es enthält,*
- *ich mich dabei (zunächst) auf wenige, einfache Grundobjekte (Punkte, Geraden, Ebenen, ggf. Kreise und Kugeln) und aus ihnen zusammengesetzten Gebilden beschränke,*
- *ich (zur flexibleren Beschreibung) der Beziehung von Punkten untereinander außer Zahlen auch noch Vektoren zulasse?*

Eine solche Erkundung muss allerdings selbstzweckhaft bleiben, wenn sie nicht hinsichtlich ihrer Ziele, Leistungen und im Vergleich mit anderen Formen geometrisch nicht-enthaltsamer Erkundungen des Anschauungsraumes reflektiert wird. Dazu bedarf es wenigstens einfachster „Objektstudien“, hierzu wurden im Vortrag zwei Miniaturen andiskutiert:

- Inwiefern weiß man von einem Dreieck eigentlich schon alles, wenn man die Lage $A(3\,|\,0)$, $B(0\,|\,0)$,$(0\,|\,4)$ seiner Eckpunkte kennt? Inwiefern weiß man „mehr“ als durch geometrische Beschreibungen?
- In einem Buch zur Vektorrechnung steht: Genau dann, wenn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, ist $ABCD$ ein Parallelogramm. Stimmt das so? Wenn

ja: Warum? Wenn nein: Was wäre zu ergänzen? Inwiefern weiß man dann schon alles, was man von einem Parallelogramm wissen kann?

Abschließend wurde der Frage nachgegangen, inwiefern die Probleme der Analytischen Geometrie überhaupt Probleme der elementaren Geometrie mit anderen Mitteln bearbeiten bzw. inwiefern Probleme und Methoden der elementaren Geometrie zu solchen der Analytischen Geometrie in Beziehung gesetzt werden können, um über Gemeinsamkeiten und Unterschiede, Kohärenzen und Differenzen reflektieren zu können. Die zur Gegenüberstellung genutzten Folien sind in Abbildung 2 wiedergegeben.

„Geometrische Probleme" der linearen Analytischen Geometrie

Kernbereich

– Lagebeziehung von Geraden und Ebenen
– Schnitte von Geraden und Ebenen
– Skalarprodukt zum Nachweis der Orthogonalität

Erweiterter Bereich

– Abstandsprobleme
– Skalarprodukt zur Berechnung von Längen und Winkeln

Randbereich

– Beweise affiner und metrischer Sätze über „vollständige Vektorzüge"

Welche dieser „Probleme" hatte man eigentlich vorher schon?

Vorerfahrungen zu „Analytischen Probleme" in der Elementaren Geometrie

– Lagebeziehung von Geraden und Ebenen: Charakterisierung spezieller, idealisierter Figuren und Körper (häufig symmetrisch)
– Schnitte von Geraden: besondere (häufig symmetrische) Lagen gewisser „interessanter" Punkte.
– Nachweis der Orthogonalität: Winkelsumme, Pythagorassatz, Trigonometrie
– Berechnungen von Längen und Winkeln: Winkelsumme, Pythagorassatz, Trigonometrie

Reflexionswürdige Unterschiede:

– Lokale Perspektive: begrenzte lineare Objekte (Strecke, Begrenzungsfläche), Figuren, Körper, seltener offene Konfigurationen
– Wo Form und Gestalt im Fokus, Geometrie von Strecken*verhältnissen*, Lage*beziehungen*
– Elementare Geometrie: Ebene, Analytische Geometrie: Raum, Zufall?

Abbildung 2

Literatur

Beutelspacher, A., Danckwerts, R., Nickel, G., Spies, S., Wickel, G. (2011): Mathematik Neu Denken. Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten. Wiesbaden: Vieweg und Teubner.

Borneleit, P., Danckwerts, R., Henn, H.-W., Weigand, H.-G. (2001): Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe. In: Journal für Mathematik-Didaktik, 22 (1), 73 - 90.

IDM/AECC-M (2009): Das Projekt „Standardisierte schriftliche Reifeprüfung aus Mathematik". http://www.aau.at/idm/downloads/sRP-M_September_2009.pdf

Peschek, W. (2005): Reflexion und Reflexionswissen in R. Fischers Konzept der Höheren Allgemeinbildung. In: Lengnink, K. & Siebel, F. (Hrsg.): Mathematik präsentieren, reflektieren, beurteilen. Darmstadt: Allgemeine Wissenschaft, 55-68.

Tietze, U.-P., Klika, M., Wolpers, H. (Hrsg.) (2000): Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 2: Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra. Braunschweig/ Wiesbaden: Vieweg und Teubner.

Vohns, A. (2010): Fünf Thesen zur Bedeutung von Kohärenz- und Differenzerfahrungen im Umfeld einer Orientierung an mathematischen Ideen. In: Journal für Mathematik-Didaktik 31 (2), 227-256.

Wittmann, G. (2003): Zentrale Ideen der Analytischen Geometrie. In: mathematik lehren (119), 47- 51.