

Daniela ABMUS, Frank FÖRSTER, Braunschweig

## **Fähigkeiten zur Analogieerkennung und zum Transfer mathematischer Strukturen bei mathematisch begabten Grundschulkindern**

„Das ist eigentlich die gleiche Aufgabenstellung. Nein, nicht, das ist eigentlich ein anderer Weg, wie man darauf kommen kann.“ (Leon)

Nach Käpnick (1998, 266) ist die „Fähigkeit im selbständigen Transfer erkannter Strukturen“ eines von sieben Merkmalen mathematischer Begabung bei Grundschulkindern. Um im Rahmen eines *Transfers* Strukturen, Strategien oder Ergebnisse von einer mathematischen Situation (Quellbereich) auf eine analoge mathematische Situation übertragen zu können, muss zunächst die Analogie der beiden Situationen erkannt werden. *Analogien* verstehen wir dabei als Paar von Sachverhalten, die sich durch eine gemeinsame Struktur auszeichnen. „Die strukturelle Gemeinsamkeit besteht nicht im Material und nicht in den Eigenschaften oder den Merkmalen der Objekte, sondern in den Relationen, die zwischen den Objekten herrschen.“ (Klauer 2011, 60, nach Gentner, 1983, Gentner & Markman, 1997)

Obwohl es zahlreiche Veröffentlichungen zu Analogieerkennung und Transfer gibt (ebd., 13), nehmen nur wenige expliziten Bezug auf mathematische Begabung. Dies war der Anlass zu der folgenden Videostudie mit insgesamt 32 potentiell mathematisch begabten Dritt- und Viertklässlern.

Die konkreten Zielsetzungen der Videostudie waren:

- Die Analyse von Zusammenhängen zwischen Vorgehensweisen und Analogieerkennung von mathematisch begabten Kindern bei der Bearbeitung von zueinander strukturgleichen Aufgaben;
- Die Ermittlung des Zeitpunkts der Analogieerkennung im Lösungsprozess und deren Eigenständigkeit.

Als Ausgangshypothese gingen wir davon aus, dass Analogieerkennung abhängig von der gewählten Vorgehensweise im Lösungsprozess ist.

### **1. Rahmenbedingungen und Design der Videostudie**

Probanden der Studie waren Teilnehmer der mathematischen Lernwerkstatt der TU Braunschweig. Im Einzelinterview bearbeitete jedes Kind eine von drei Aufgaben. Jede Aufgabe enthielt zwei zueinander analoge Teilaufgaben (Quell- und Zielaufgabe), die jedoch unabhängig voneinander lösbar waren, sodass das Erkennen der analogen Grundstruktur für die Bearbeitung der Zielaufgabe nicht notwendig war, diese aber deutlich erleichterte.

Ausgewählt wurden zwei Aufgaben zu figurierten Zahlen, eine zu *Dreieckszahlen* (Bestimmung der 20. Dreieckszahl vs. Bestimmung der Summe der ersten 20 natürlichen Zahlen) und eine zu *Rechteckszahlen* (Bestimmung der 20. Rechteckszahl vs. Bestimmung der Summe der ersten 20 geraden Zahlen), sowie eine *kombinatorische Aufgabe* (Ermittlung der Anzahl möglicher Kombinationen von drei verschiedenen Eissorten aus 5 möglichen vs. Ermittlung der Anzahl möglicher Dreiecke, die sich zwischen 5 Punkten zeichnen lassen, s. Abb. 1).

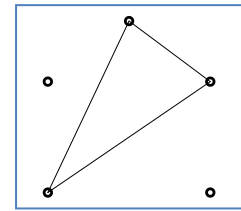


Abb. 1

Nach Durchlesen der Fragestellungen und Klärung relevanter Begriffe bearbeiteten die Probanden die Aufgaben eigenständig. Die Kinder wurden vorab zum lauten Denken aufgefordert und im Anschluss an die Bearbeitung noch einmal in Form eines teilstandardisierten Leitfadeninterviews zu ihren Vorgehensweisen sowie zu möglichen Auffälligkeiten und ggf. Ähnlichkeiten bei den Aufgabenstellungen, Vorgehensweisen und Lösungen befragt. Die Auswertung erfolgte auf Grundlage der Videos und der Transkription wesentlicher Interviewteile. Die Analyse war hinsichtlich verschiedener Aspekte wie Vorgehensweisen bei der Bearbeitung der Aufgabenstellungen, Eigenständigkeit und Stabilität der Analogieerkennung sowie Zeitpunkt der Analogieerkennung im Lösungsprozess kategorienbildend angelegt.

## 2. Erste Ergebnisse

Es zeigten sich bei den drei eingesetzten Aufgaben deutliche Unterschiede bzgl. Analogieerkennung und Transfer.

Bei den *Dreieckszahlen* erkannten fast alle Kinder (10 von 12) eine Analogie. Ausnahmen bildeten lediglich die beiden Kinder, welche bei der Bearbeitung der Quellaufgabe eine Vorgehensweise gewählt hatten, die nicht auf der Summation der ersten 20 natürlichen Zahlen beruhte. Hinsichtlich des Zeitpunkts der Analogieerkennung waren große Unterschiede zu beobachten. So wurde die Analogie von 6 Kindern bereits vor Bearbeitung der Zielaufgabe erkannt und dahingehend eigenständig genutzt, dass das Ergebnis der Quellaufgabe auf die Zielaufgabe übertragen wurde (Transfer). Der Zeitpunkt der Analogieerkennung differierte dabei noch zwischen dem erstmaligen Durchlesen der Aufgabenstellungen und dem Zeitpunkt unmittelbar vor Bearbeitung der Zielaufgabe. Die anderen 4 Kinder stellten erst bei oder nach Bearbeitung der Zielaufgabe eine Verbindung zwischen beiden Aufgabenteilen her, einmal war eine gezielte Nachfrage notwendig.

Deutlich seltener als vorab vermutet zeigte sich bei den *Rechteckszahlen* eine Analogieerkennung (3 von 9). Zwar traten darüber hinaus in den Interviews immer wieder Situationen auf, bei denen wir eine Analogieerkennung interpretativ „feststellten“, aber diese „Analogie“ stellte sich im weiteren Verlauf des Gesprächs als äußerst brüchig heraus und wurde oft mit neuen Gedanken oder der ursprünglichen Lösungsidee des Kindes vermischt. Weiterhin trat die Analogieerkennung (ob vollzogen oder nur vermutet) bei keinem Kind bereits bei der Aufgabenbearbeitung ein, sondern frühestens beim Ergebnisvergleich und wurde überwiegend erst durch Nachfragen der Interviewerin initiiert. Bezüglich der Vorgehensweisen konnten wir feststellen, dass die Analogieerkennung vereinfacht wurde, wenn die Kinder die Veränderung der Figur als hinzukommenden „Haken“

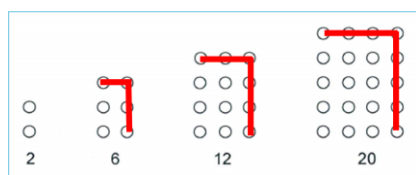


Abb. 2

interpretiert hatten (s. Abb. 2). Dies trat aber nur in wenigen Fällen auf. Erstaunlicherweise wurde zum Teil auch dann keine Analogie erkannt, wenn von den Kindern gleiche Rechnungen in beiden Teilaufgaben durchgeführt wurden.

Die Analogieerkennung bei der *Kombinatorikaufgabe* war bereits im Vorfeld der Erprobung durch die unterschiedlichen Sachkontexte der Aufgabenteile sowie den, im Unterschied zur Quellaufgabe, naheliegenden zeichnerischen Zugang bei der Zielaufgabe als schwierig eingeschätzt worden. Diese Einschätzung bestätigte sich dahingehend, dass nur einzelne Kinder (3 von 11) vor bzw. bei der Bearbeitung der Zielaufgabe eigenständig einen Bezug zur Quellaufgabe herstellten und das Ergebnis transferierten bzw. die Korrektheit des Ergebnisses der Zielaufgabe über die Analogie zur Quellaufgabe begründeten. Alle anderen erkannten die Analogie erst nach der Bearbeitung beim Nebeneinanderlegen der beiden Aufgabenblätter bzw. auf Nachfrage der Interviewerin. Inwieweit die Kinder sich dabei wirklich die analoge Aufgabenstruktur vergegenwärtigten, war nicht immer beurteilbar, da sich die Analogiebegründungen häufig auf die Zuordnung gleicher Zahlen in den Aufgabenstellungen beschränkten. Wurde die Analogie vor der Nachfrage eigenständig erkannt, so wurde dies meist durch die Ergebnisgleichheit beider Aufgabenteile ausgelöst. Eine Abhängigkeit der Analogieerkennung von verwendeten Vorgehensweisen bei der Quellaufgabe war bei dieser Aufgabe nicht zu beobachten, obwohl insgesamt ein großes Spektrum an unterschiedlichen Vorgehensweisen gezeigt wurde.

### 3. Fazit und Ausblick

Aufgrund der relativ kleinen Datenbasis sind zwar zur Absicherung der Ergebnisse weitere empirische Untersuchungen erforderlich, wir ziehen jedoch ein erstes Fazit:

Das Erkennen und Nutzen von Analogien scheint von der jeweiligen Aufgabenstellung abhängig zu sein und findet zu unterschiedlichen Zeitpunkten im Lösungsprozess statt. Bei der Dreiecksaufgabe gelingt die Analogieerkennung weitgehend und eigenständig, aber auch mathematisch begabte Kinder haben bei komplexeren Aufgabenstellungen Schwierigkeiten, Analogien zu erkennen und zu nutzen.

Bzgl. unserer Eingangshypothese deutet sich eine schlüssig interpretierbare Abhängigkeit der Analogieerkennung von der Vorgehensweise nur bei der Dreiecksaufgabe an. Die Analogieerkennung wurde hier, wie vermutet, begünstigt, wenn bereits die Quellaufgabe über die Summenbildung der ersten 20 natürlichen Zahlen gelöst wurde. Bei der Rechtecksaufgabe könnte die Strukturierung des Zuwachses, nicht aber das konkrete Vorgehen im Quellbereich einen Einfluss haben. Erstaunlicherweise ist bei der Kombinatorikaufgabe kein Zusammenhang erkennbar.

Wie kommt es zu diesen großen Unterschieden in der Analogieerkennung bei den verschiedenen Aufgaben? Die übliche theoretische Erklärung über *Unterschiede in der Transferdistanz* (Barnett/Ceci, nach Klauer 2011, 30) greift nicht, da es sich bei unseren Aufgaben bzgl. dieser Kategorisierung durchweg um einen nahen Transfer handelt, auch wenn es kleine Unterschiede in der Modalität bzw. Repräsentation gibt. Ein möglicher Erklärungsansatz besteht in den unterschiedlichen *Tiefenstrukturen* der Aufgaben. Obwohl nämlich mit der Summation theoretisch isomorphe Tiefenstrukturen vorliegen, zeigen sich aber insbesondere bei der Rechtecksaufgabe deutliche Unterschiede in den für die Kinder naheliegenden Strukturierungen (Produktbildung  $20 \cdot 21$  bei Rechteckszahl vs. Summation bzw. Produktbildung  $10 \cdot 42$  bei Summenbildung).

Ein Letztes: Gleiche Ergebnisse, selbst wenn diese ohne explizite Rechnungen präsentiert werden, lassen nicht den Schluss zu, dass ein Transfer und somit eine Analogieerkennung vollzogen wurde. Lösungsprozesse lassen sich also nicht vom schriftlichen Produkt aus interpretieren.

### Literatur

- Käpnick, F. (1998): Mathematisch begabte Grundschul Kinder. Frankfurt a. Main: Lang  
Klauer, K. J. (2011): Transfer des Lernens. Warum wir oft mehr lernen als gelehrt wird. Stuttgart: Kohlhammer