

Thomas GAWLICK, Hannover

## Hannoveraner Studien zum Problemlösen

Diese Sektion berichtet über stoffdidaktische und empirische Analysen zur Heuristik (Problemlösekunst). Bindeglied sind die Leitfragen

- Was macht eine Aufgabe schwierig?
- Welche Heurismen helfen bei der Lösung?

Sie sind auch Leitfragen für das Projekt *HeuRekAP* (**Heuristische Rekonstruktion von Aufgaben zum Problemlösen**). **Heuristische Rekonstruktion** (HR) „gibt dem einen Begriff, was wir – Polya seit Referendarszeiten im Hinterkopf – bei etlichen unserer Aufgaben intendierten“ (Elschenbroich): ein systematisches Vorgehen, um die „heuristic literacy“ der SuS zu fördern. Gawlick (2012) entwarf dafür angelehnt an Polyas bekanntes Problemlöse-schema dieses **Rekonstruktionsschema** und erläuterte es an Beispielen:

1. Analysieren Sie das zu rekonstruierende Problem und seine Lösung. Beachten Sie, dass Aufgaben aus (Schul)-Büchern oft recht geschlossen sind. Wie **explizit** müssen Sie Gegebenes und Gesuchtes **vorgeben**? Was können SuS **selbst erschließen**?
2. Stellen Sie sich zur unterrichtlichen Aufbereitung die folgenden **Schlüsselfragen**:
  - a. Welche **(Teil-)Ziele** sollen die SuS erreichen?
  - b. Welche **Heurismen** können an verschiedenen Stellen des Problemlöseprozesses hilfreich sein?
  - c. Welche **Heurismen** können die SuS **eigenständig** finden, für welche benötigen sie **Hinweise**? Sollen die Hinweise schon in der **Aufgabenstellung** enthalten sein oder **situativ ergänzt** werden?
  - d. Welche **Vorkenntnisse** benötigen die SuS zur Lösung des Problems? Was davon kann als bekannt **vorausgesetzt** werden, was muss **mitgeliefert** werden?
3. Nutzen Sie die Antworten auf diese Schlüsselfragen, um das ursprüngliche Problem zu überarbeiten und **heuristisch anzureichern**.
4. Reflektieren Sie die Bearbeitung des modifizierten Problems durch die SuS und ziehen Sie aus Ihren Beobachtungen Schlüsse für weitere Verbesserungen.

Das Schema spricht drei Aspekte von Schoenfelds Problemlösemodell an:

- **Fachliche Ziele und Ressourcen**
- **Heurismen (heuristische Hilfsmittel Strategien und Prinzipien)**
- **Steuerung durch die SuS** oder **durch die Lehrperson**

Hinzu tritt die **Heuristische Instrumentation (HI)**: Die passgenaue Auswahl von lösungsförderlichen Medien und Sozialformen (vgl. ebd.).

Im Projekt HeuRekAP werden (Schulbuch-)Aufgaben für ein Heuristik-Training rekonstruiert und instrumentiert: zwei achte Klassen eines Hannoveraner Gymnasiums bearbeiten sie mit DGS-Arbeitsblättern (nach El-

schenbroich/Seebach) und einem Argumentationsschema aus „Neue Wege“ – die eine mit **explizitem**, die andere mit **implizitem Heuristentraining**.

*Brockmann-Behnsen* berichtet erste Trainingserfolge: Nach 3 Monaten verzeichneten die Versuchs- gegenüber den Parallelklassen eine deutlich erhöhte Fähigkeit, Argumente zu deduktiven Ketten zu verknüpfen.

Um später die Überlegenheit des **expliziten** über das **implizite Heuristentraining** nachweisen zu können, braucht es ein herausforderndes Problem – etwa den Satz von Pappus, der den Pythagoräischen Lehrsatz auf Parallelogramme über den Seiten eines beliebigen Dreiecks verallgemeinert.

*Gawlick* zeigt eine anspruchsvolle HR: Der Satz wird so rekonstruiert, dass die Behauptung nicht mehr vorgegeben werden muss, sondern selbst gefunden werden kann. Hierbei spielt die HI eine tragende Rolle: im Zugmodus wird Pythagoras' Satz als Spezialfall in seiner Besonderheit erkennbar. Durch Analogisieren und Umstrukturieren des Scherungsbeweises erhalten die SuS das „Baumaterial“ zur Verallgemeinerung der Flächenaussage.

*Elschenbroich* bietet eine alternative Rekonstruktion, die auf den Spuren von Botsch und Henrici/Treutlein den Pappusschen Flächensatz für SuS durch einfache Verschiebung eines Dreiecks entdeckbar macht, da bei der Verschiebung die Dreiecksseiten Parallelogramme überstreichen, die die bekannte Summenformel erfüllen! Die alten Ideen werden mit dem modernen Werkzeug DGS dynamisiert und schülergemäß aufbereitet (HI) und es wird ein Weg zum Satz des Pythagoras als Spezialfall aufgezeigt.

Rott und Lange erforschen videographierte Problemlöseprozesse von Fünftklässlerpaaren beim Bearbeiten mathematischer Problemaufgaben in der MALU-Förderung. Solche empirische Studien lassen sich der vierten Phase der HR zuordnen, in der die Wirksamkeit der HR anhand der Interaktion von Problemlösern mit rekonstruierten Aufgaben untersucht wird.

*Rott* zeigt, wie heuristische Elemente in den Problemlöseprozessen identifiziert und kodiert werden und geht der Frage nach, inwiefern der Heuristeneinsatz mit dem Problemlöseerfolg zusammenhängt.

*Lange* identifiziert mittels QIA in den Prozessen verschiedene Typen von Kooperationshandlungen und untersucht, inwiefern ein Paarsetting i.A. und bestimmte Kooperationsarten i.B. dem Bearbeitungserfolg förderlich sind.

## Literatur

Gawlick, Th (2012): „Click, drag, think!“ Posing and Exploring Conjectures with Dynamic Geometry Software, in Habre, S. (ed.): *Dynamical mathematical software and visualization in the learning of mathematics*. Hershey: IGI Global 2012. Vorfassung, weitere Literatur und Anhänge: [www.idmp.uni-hannover.de/downloads.html](http://www.idmp.uni-hannover.de/downloads.html)