

# ORIGAMICS

## PAPIERFALTEN MIT MATHEMATISCHEM SPÜRSINN<sup>1</sup>

**Hans-Wolfgang Henn**  
 IEEM, FB Mathematik  
 Universität Dortmund  
 Email: Wolfgang.Henn@math.uni-dortmund.de

### 1 Origami – die japanische Papierfaltkunst

Sicher kennen Sie alle die wunderschönen Gebilde, die kundige Hände aus farbigem Papier falten können. Es handelt sich um die uralte japanische Kunst des *Origami*, einem Wort, das die beiden Wortteile *ori* für Falten und *kami* für Papier hat. Das Wort *kami* wandelt sich in Verbindung mit dem *ori* zu *gami*. Traditionell wird das Kunstwerk aus einem quadratischen Stück Papier ohne Schneiden, nur durch Falten erzeugt. So werden aus einem simplen Stück farbigem Papier hüpfende Frösche, prachtvolle Blumen und vielerlei andere Figuren.

Im Jahr 2000 war der grosse internationale Kongress für Mathematikdidaktik in Tokio. Es gab natürlich auch eine riesige *Origami*-Ausstellung (*Abb. 1 – 4* zeigen einige Beispiele) und, noch schöner, eine *Origami*-Werkstatt, wo wir unter fachkundiger Anleitung falten durften. So ist z. B. die gefaltete Schnecke entstanden. Dort habe ich meine Liebe zu *Origami* entdeckt!



*Abb. 1*



*Abb. 2*

---

<sup>1</sup> Erweiterte Version von (Henn, 2003<sup>1</sup>) aus Anlass eines gleichnamigen Vortrags am 3.12.03 an der Pädagogischen Hochschule Weingarten



Abb. 3



Abb. 4

Ganz bestimmt haben Sie selbst schon einmal Papierflieger gefaltet und sind damit selbst *Origami*-Künstler geworden. Am 22. 11. 2002 ist in Bulgarien sogar die in *Abb. 5* gezeigte *Origami*-Briefmarke erschienen: Eine aus Papier gefaltete Friedenstaube erinnert an den 30. Jahrestag der KSZE (Konferenz für Sicherheit und Zusammenarbeit in Europa).



Abb. 5

Beachten Sie die Symmetrieachsen, die beim Falten von Papierfliegern auftreten – schon sind wir mitten in der Geometrie! Diese Verbindung zur Mathematik ist so fruchtbar, dass sich eine eigene *Origami*-Tradition hierfür gebildet hat, die Kunst des *Origamics*: Dies ist eine Abkürzung für die Verbindung *Origami and Mathematics*. Der Pionier für mathematisches Papierfalten ist der in der Zwischenzeit pensionierte japanische Biologieprofessor *Haga Kazuo*, der sehr viele mathematische Phänome beim Papierfalten studiert hat (vgl. *Abb. 6* und *7*). Herr *Kazuo* hatte beim zweiten internationalen Kongress für „*Origami Science and Scientific Origami*“ im Jahr 1994 das Wort *Origamics* vorgeschlagen.



Abb. 6

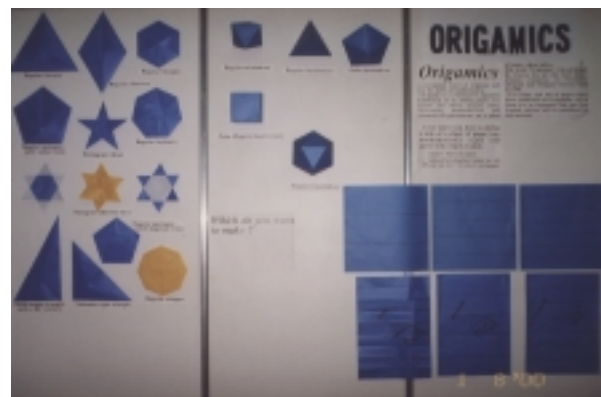


Abb. 7

Betreten Sie mutig das Land des mathematischen *Origami*! Erleben Sie den Spass am Falten und den Reiz, mathematische Zusammenhänge aufzuspüren! In den folgenden Abschnitten sind *Origamics*-Aufgaben, zum Teil einfach, zum Teil etwas komplizierter, enthalten. Zu allen Aufgaben finden Sie Lösungshinweise, die Sie aber erst dann zu Rate ziehen sollten, wenn Sie selbst lange genug geknobelt haben.

## 2 Drei klassische Konstruktionsprobleme

Alle Faltaufgaben, die ich hier vorstellen will, haben mit den folgenden drei schon von den alten Griechen behandelten Konstruktionsproblemen zu tun (vgl. Henn, 2003<sup>2</sup>, S. 31 f). Es handelt sich um das Delische Problem der Würfelverdoppelung, die Dreiteilung des Winkels und die Konstruktion des regelmäßigen n-Ecks. Erst im 19. Jahrhundert hat man diese Probleme abschließend klären können!

### 2.1 Das Delische Problem



Abb. 8

Dieses Problem gehört zu den berühmten Aufgaben der griechischen Antike. Der Name beruht nach antiken Berichten auf dem Orakel von Delphi (Abb. 8), das den Deliern aufgab, zur Abwehr einer Pest den würfelförmigen Altar ihres Tempels zu verdoppeln. Es handelt sich also um die geometrische Aufgabe, einen Würfel mit doppeltem Rauminhalt eines gegebenen Würfels zu konstruieren. Hat der Ausgangswürfel die Kantenlänge 1 (in irgendeiner Einheit gemessen), so gilt folglich für die Kantenlänge  $z$  des größeren Würfels  $z^3 = 2$ , er hat also die Kantenlänge

$\sqrt[3]{2}$ . Das Delische Problem besteht somit in der Konstruktion dieser dritten Wurzel. Seit dem 19. Jahrhundert weiß man von der prinzipiellen Unmöglichkeit, diese Konstruktion allein mit Zirkel und Lineal durchzuführen. Zur Erinnerung: Für die klassischen Konstruktionsaufgaben sind nur die folgenden vier „Basiskonstruktionen“ erlaubt:

- (K1) durch 2 verschiedene Punkte kann man die Verbindungsgerade legen;
- (K2) zu 2 nicht parallelen Geraden kann man den Schnittpunkt konstruieren;
- (K3) um einen gegebenen Punkt  $M$  als Mittelpunkt kann man einen Kreis  $k$  zeichnen, der die Entfernung  $r$  zweier gegebener Punkte zum Radius hat;
- (K4) die Schnittpunkte zweier Kreise oder eines Kreises mit einer Geraden kann man konstruieren.

Für eine beliebige Konstruktion dürfen diese Basiskonstruktionen *endlich oft* ausgeführt werden. „Konstruktion“ in unserem Sinne ist natürlich nicht die konkrete, fehlerbehaftete Zeichnung, sondern die Frage, ob die genaue Lösung theoretisch mit Zirkel und Lineal allein gefunden werden kann. Es geht also um das Idealisieren realer Handlungen. Diese Idealisierung ist dann eine exakte mathematische Konstruktion.

### 2.2 Die Trisektion des Winkels

Die alten Griechen versuchten vergeblich, nur mit Zirkel und Lineal einen gegebenen Winkel zu dritteln. Über mehr als 2000 Jahre verzweifelten Berufs- und Hobby-Mathematiker an dieser Aufgabe, bis endlich im 19. Jahrhundert der Beweis gelang, dass diese Aufgabe mit Zirkel und Lineal *unlösbar* ist: *Pierre Laurent Wantzel* (1814 – 1884) zeigte, dass schon beim

$60^\circ$ -Winkel diese Konstruktion unmöglich ist. Bei der mathematischen Analyse stößt man wieder auf eine algebraische Gleichung vom Grad 3.

Der Schlüssel zum Verständnis der Konstruktionsprobleme ist ihre Übersetzung in die Sprache der Algebra. Jedes geometrische Konstruktionsproblem kann auf die Aufgabe zurückgeführt werden, zu gegebenen Strecken  $a, b, c \dots$  gewisse gesuchte Strecken  $x, y, \dots$  nur mit Zirkel und Lineal zu konstruieren. Denkt man sich die konstruierbaren Strecken am Zahlenstrahl abgetragen, so bekommt man die äquivalente Aufgabe, eine reelle Zahl zu konstruieren. Der Hauptsatz über die konstruierbaren Zahlen besagt nun, dass genau diejenigen Zahlen mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind, die in einer Körpererweiterung  $K$  von  $\mathbb{Q}$  liegen mit  $(K : \mathbb{Q}) = 2^n$ , wobei  $K$  und  $\mathbb{Q}$  durch eine Kette quadratische Körpererweiterungen verbunden sind. Es sind vereinfacht ausgedrückt diejenigen Zahlen, die sich durch aus Quadratwurzeln gebildete Ausdrücke darstellen lassen.

### 2.3 Die Konstruktion des regelmäßigen n-Ecks



Abb. 9

Schon immer waren möglichst symmetrische Figuren und Körper für Künstler, Kunsthandwerker und natürlich auch für Mathematiker besonders interessant. Nach dem Kreis weisen die regelmäßigen  $n$ -Ecke die meisten Symmetrienachsen auf, also  $n$ -Ecke, die gleichlange Seiten und gleichgroße Innenwinkel haben. *Euklid* (325 – 270 v. Chr., *Abb. 9*) hat in seinen *Elementen* die Konstruktion von 3-, 4- und 5-Eck behandelt und natürlich von allen weiteren  $n$ -Ecken mit zusätzlichem Faktor  $2^s$ .

Der große Mathematiker *Carl Friedrich Gauß* (1777 – 1855), er ist in *Abb. 10* auf einer deutschen Briefmarke aus dem Jahr 1955 abgebildet, hat als erster eine vollständige Theorie dieser regelmäßigen  $n$ -Ecke geschaffen und beschrieben, welche man mit Zirkel und Lineal konstruieren kann und welche nicht. Sein im Alter von 17 Jahren bewiesenes Resultat lautet:

Das regelmäßige  $n$ -Eck ist genau dann konstruierbar, wenn gilt

$$n = 2^N \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_m$$

$N \geq 0$  und  $p_i$  paarweise verschiedene Primzahlen vom *Fermatschen* Typus  $2^{2^s} + 1$ .



Abb. 10

Für  $s = 0, \dots, 4$  ergeben sich die fünf *Fermat-Primzahlen* 3, 5, 17, 257 und 65.537, die zugehörigen  $n$ -Ecke sind alle konstruierbar und sind auch schon konstruiert worden (vgl. Henn, 2003<sup>2</sup>, S. 32 f). Weitere *Fermat-Primzahlen* sind bis heute unbekannt; von einigen wenigen

weiteren Zahlen dieses Typs weiß man, dass sie zerlegbar sind. Über die ähnlich gebildeten *Mersenne*-Primzahlen des Typs  $2^p - 1$  mit einer Primzahl  $p$  weiß man etwas mehr. Es sind bis heute 40 Primzahlen  $p$  bekannt, für die  $2^p - 1$  ebenfalls eine Primzahl ist. Die letzte mit  $p = 20.996.011$  (die zugehörige *Mersenne*-Primzahl hat etwa 6,3 Millionen Ziffern) hat man Mitte November 2003 entdeckt!

### 3 Der Satz von Haga

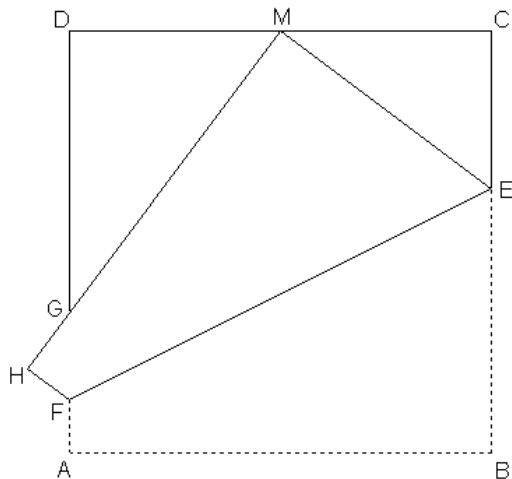


Abb. 11

Unter den Jüngern des mathematischen Papierfaltens wird immer wieder eine Faltkonstruktion von *Haga Kazuo* als der *Satz von Haga* zitiert: Sie beginnen mit einem quadratischen Papierstück ABCD (vgl. *Abb. 11*). Markieren Sie durch einen leichten Faltknick die Mitte M der oberen Seite und falten dann, wie in der Abbildung gezeigt, die rechte untere Ecke B auf M. Der *Satz von Haga* behauptet nun, dass die drei entstehenden Dreiecke MEC, GMD und FGH ähnliche rechtwinklige Dreiecke mit dem Seitenverhältnis 3 : 4 : 5 sind. Außerdem beträgt die Streckenlänge  $\overline{AG}$  ein Drittel der Seitenlänge  $\overline{AD}$  des Ausgangsquadrats. Wenn Sie die Faltkonstruktion sorgfältig nachvollziehen und analysieren, können Sie ganz bestimmt den *Satz von Haga* beweisen!

Damit können Sie exakt eine Seite in drei gleich lange Stücke teilen.

Zum **Beweis** des Satzes von Haga sei der Einfachheit halber die Kantenlänge des Ausgangsquadrats 8 Längeneinheiten, also ist  $\overline{MC} = 4$  (vgl. *Abb. 12*). Weiter seien  $x = \overline{EC}$  und  $y = \overline{EM} = \overline{EB}$ . Die Gleichung  $x + y = 8$  und der Satz des Pythagoras im Dreieck ECM, also  $y^2 = 4^2 + x^2$  liefern zusammen sofort  $x = 3$  und  $y = 5$ . Die drei fraglichen rechtwinkligen Dreiecke haben alle die gleichen Winkel, sind also ähnlich. Angewandt auf die Dreiecke GMD und ECM folgt  $\overline{DG} : 4 = 4 : 3$ , also wie behauptet

$$\overline{DG} = \frac{16}{3} = \frac{2}{3} \cdot 8 \quad \text{und} \quad \overline{AG} = 8 - \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{1}{3} \cdot \overline{AD}.$$

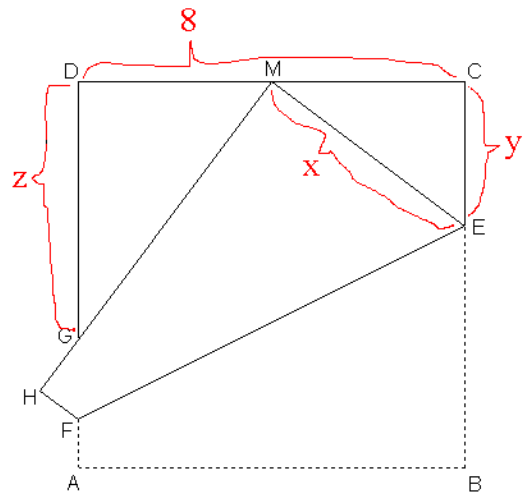


Abb. 12

Diese Konstruktion lässt sich verallgemeinern: Markieren Sie auf einem neuen quadratischen Blatt zuerst M wie eben und dann die Mitte N der Strecke MC. Dann falten Sie B auf N. Was beobachten Sie jetzt?

Und weiter: Wenn Sie auf dem quadratischen Blatt oben in  $n$  gleiche Teile falten können, so können Sie auch in  $n+1$  gleiche Teile falten.

Die **Beweis-Idee** zeigt die *Abb. 13*, der Beweis läuft genauso wie beim Satz von Haga.

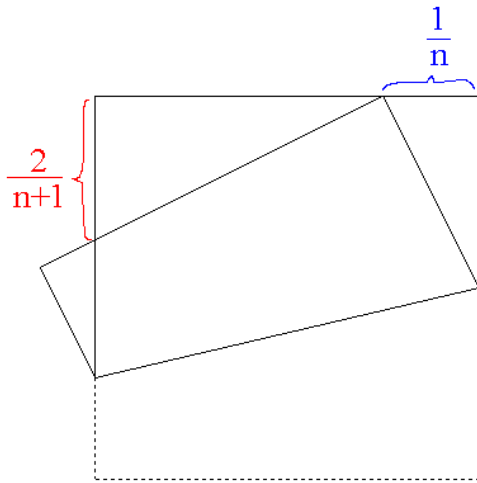


Abb. 13

Damit ist allgemein gezeigt, dass man ein Blatt für jede natürliche Zahl  $n$  in  $n$  gleiche Teile falten kann.

## 4 Das Delische Problem der Würfelverdopplung

Auch dieses Problem lässt sich durch eine Faltkonstruktion lösen. Sie beginnen, wie in *Abb. 14* gezeigt, mit einem quadratischen Stück Papier, das zuerst in drei gleiche parallele Teile gefaltet wird. Da hilft der Satz von *Haga!* Nun müssen Sie so falten, dass die Ecke  $B$  als  $B'$  auf die Seite  $AD$  und gleichzeitig der Punkt  $E$  als  $E'$  auf die Strecke  $HG$  kommt. *Abb. 15* zeigt das Faltergebnis. Jetzt müssen Sie nur noch beweisen, dass *nach dem Falten* die Ecke  $B'$  die Seite  $AD$  im gewünschten Verhältnis teilt:

$$\frac{\overline{B'D}}{\overline{AB'}} = \sqrt[3]{2}.$$

Jetzt brauchen Sie noch eine weitere Faltkonstruktion, etwa unter Verwendung der Strahlensätze, um eine einzelne Strecke der Länge  $\sqrt[3]{2}$  zu konstruieren.

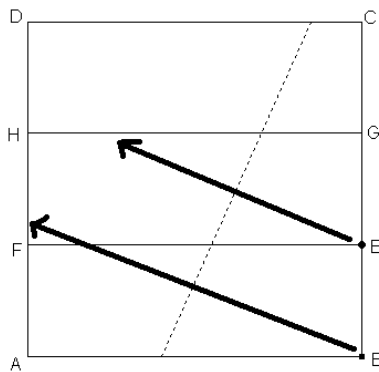


Abb. 14

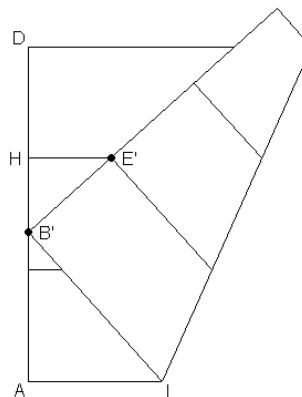


Abb. 15

Der **Beweis** der Behauptung ist etwas trickreich: Zur einfacheren Rechnung setzen wir in *Abb. 14* und *15* die Seitenlänge des Ausgangsquadrats als 3 an. Dann ist z. B.  $\overline{B'E'} = 1$ . Weiter seien  $x := \overline{DB'}$ ,  $y := \overline{AB'}$ ,  $a := \overline{AI}$  und  $b := \overline{IB'}$ . Damit gilt zunächst  $x + y = a + b = 3$ . Da die Dreiecke  $AIB'$  und  $B'E'H$  ähnlich sind, gilt

$$\frac{a}{b} = \frac{x-1}{1},$$

woraus sofort  $a = \frac{3x-3}{x}$  und  $b = \frac{3}{x}$  folgt. Außerdem gilt  $y = 3 - x$ . Setzt man dies in die *Pythagoras*-Gleichung im rechtwinkligen Dreieck  $AIB'$  ein, so erhält man zuerst eine rationale Gleichung in  $x$  mit Hauptnenner  $x^2$ . Nach Erweitern mit  $x^2$  ergibt sich eine algebraische Gleichung vom Grad 4, die man aber durch  $x$ , das ja augenscheinlich ungleich Null ist, kürzen kann. Dies führt nach einigen Umformungen zur folgenden Gleichung dritten Grades für  $x$ :

$$3x^3 - 18x^2 + 54x - 54 = 0.$$

Diese Gleichung wird nun etwas trickreich zum behaupteten Ergebnis umgeformt:

$$x^3 = -2x^3 + 18x^2 - 54x + 54 = 2(27 - 27x + 9x^2 - x^3) = 2(3 - x)^3 = 2y^3.$$

Man sieht gleich, welche Faltkonstruktion nicht mit Zirkel und Lineal ausführbar ist: Es ist das „Einschieben“ der Strecke  $BE$ !

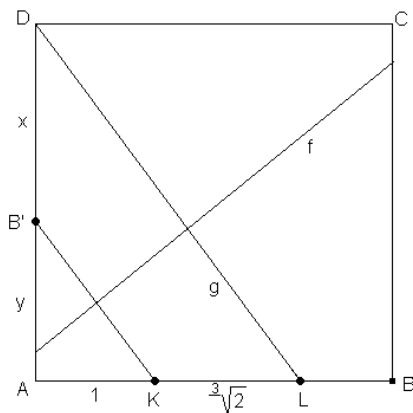


Abb. 16

Abb. 16 zeigt, wie man durch weiteres Falten jetzt eine Strecke der Länge  $\sqrt[3]{2}$  falten kann:

Die Seite  $AD$  ist schon durch  $B'$  in die Stücke  $x$  und  $y$  mit  $\frac{x}{y} = \sqrt[3]{2}$  geteilt.  $K$  ist ein Drittelpunkt der Seite  $AB$ , also mit  $\overline{AK} = 1$ . Nun wird zuerst die Linie  $KB'$ , dann die Mittelsenkrechte  $f$  von  $KB'$  gefaltet. Falten wir jetzt die Faltlinie  $g$  als Lot zu  $f$  durch  $D$ , so folgt nach den Strahlensätzen, dass  $KL$  die gesuchte Strecke der Länge  $\sqrt[3]{2}$  ist.

## 5 Die Drittelung eines beliebigen Winkels

Die folgende Anleitung zeigt Ihnen, wie Sie einen beliebigen Winkel durch eine Faltkonstruktion exakt dritteln können!

Nehmen Sie ein rechteckiges Blatt (DIN A4-) Papier  $ABCD$  und falten den zu dritteln Winkel  $\alpha = \sphericalangle CBP$  (Abb. 17.a). Falten Sie dann eine Parallele  $EF$  zu  $BC$  etwa in der Blattmitte (Abb. 17.b) und die Mittelparallele  $GH$  von  $EF$  und  $BC$  (Abb. 17.c). Falten Sie anschließend eine Ecke so ab, dass  $E$  auf  $BP$  und gleichzeitig  $B$  auf  $GH$  liegt (Abb. 17.d). Markieren Sie die Bildpunkte als  $B'$  und  $E'$  und falten zurück (Abb. 17.e). Die letzte Faltkante schneidet  $GH$  in  $I$ . Ich behaupte, dass die Linien  $BI$  und  $BB'$  dann den Ausgangswinkel  $\alpha$  (Abb. 17.f) dritteln.

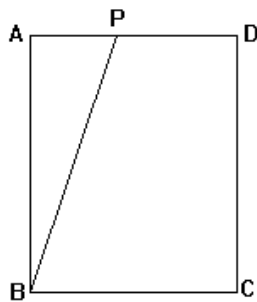


Abb. 17.a

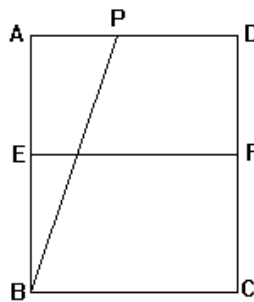


Abb. 17.b

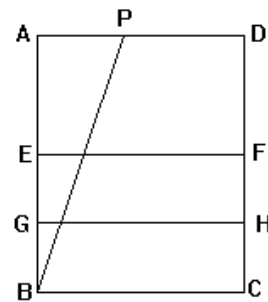


Abb. 17.c

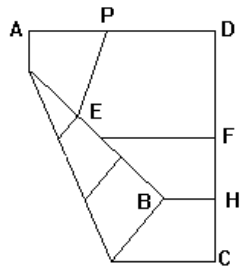


Abb. 17.d

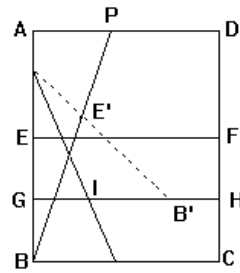


Abb. 17.e

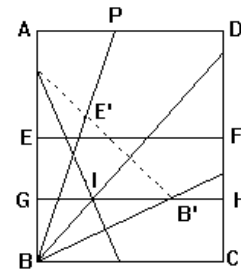


Abb. 17.f

Der **Beweis** verwendet nur elementargeometrische Schlüsse. In *Abb. 17.f* steht  $BI$  aufgrund der letzten Faltung senkrecht auf der gestrichelten Linie. Daher teilt  $BI$  das Dreieck  $BB'E'$  in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke. Das Lot von  $B'$  auf  $BC$  schneide  $BC$  im Punkt  $R$ . Dann ist  $BRB'$  ein drittes zu den beiden ersten kongruentes rechtwinkliges Dreieck. Also sind die drei Winkel bei  $B$ , wie behauptet, gleich!

Das Einschleiben der Punkte  $B$  und  $E$  in *Abb. 17.d* ist keine mit Zirkel und Lineal mögliche Konstruktion.

## 6 Regelmäßige n-Ecke

Wir beschäftigen uns hier mit den einfachsten regelmäßigen n-Ecken und versuchen, gleichseitige Dreiecke, Quadrate, regelmäßige Fünfecke und regelmäßige Siebenecke zu falten.

### 6.1 Gleichseitige Dreiecke

Für ein gleichseitiges Dreieck beginnen Sie mit einem DIN-A4-Blatt  $ABCD$ . Sie falten zuerst die Mittellinie zur längeren Seite und dann die Kante  $BE$  so, dass die Ecke  $A$  als  $A'$  auf die Mittellinie kommt (*Abb. 18.a*). Nun falten Sie weiter zunächst an der Faltkante  $EA'$  so, dass  $D$  auf die Seite  $EB$  kommt (*Abb. 18.b*). Am Ende falten Sie noch das überstehende Stückchen an der Kante  $GF$ , bis Sie ein gleichseitiges Dreieck  $BFE$  wie in *Abb. 18.c* haben. Dass dies eine exakte Faltkonstruktion ist, können Sie sicher begründen! Jetzt sehen Sie auch, dass Sie mit einem beliebigen Stück rechteckigem Papier beginnen können, die längere Seite muss nur lang genug sein (wie lange?). Ein quadratisches Papierstück würde nicht genügen.

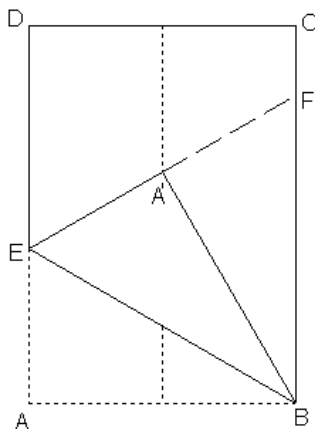


Abb. 18.a

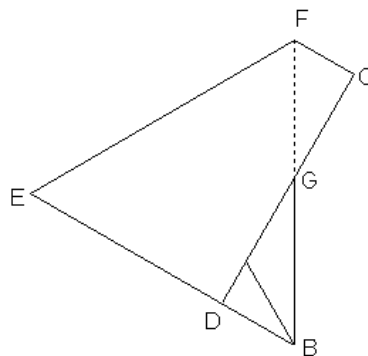


Abb. 18. b

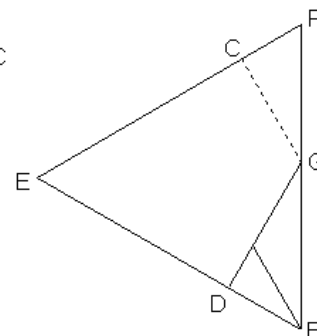


Abb. 18.c



Frage am Rande: Beim DIN-Format verhalten sich die Seiten wie  $1 : \sqrt{2}$ . Dass man gerade dieses Verhältnis gewählt hat, hängt auch mit Papierfalten zusammen! Wie?

Der **Beweis** ist einfach: In Abb. 19.a sind die Dreiecke ABE und EBA' wegen der Faltung kongruent. Weiter ist A' die Mitte von EF, so dass auch die Dreiecke EBA' und A'BF kongruent sind. Zusammen folgt, dass das Dreieck EBF gleichseitig ist. Die weiteren Faltschritte beziehen sich auf dieses Dreieck und beseitigen nur die überstehenden Papierteile.

## 6.2 Quadrate

Ein Quadrat aus einem DIN-A4-Blatt zu falten, ist zu einfach für Sie. Nehmen Sie irgendein möglichst unregelmäßiges, z. B. aus einem großem Zeitungsblatt gerissenes Papierstück, und falten Sie ein Quadrat!

## 6.3 Regelmäßige Fünfecke



Abb. 19

Das regelmäßige Sternfünfeck ist auch als *Pentagramm* bekannt. Das Pentagramm besteht also aus den Diagonalen des regelmäßigen Fünfecks, die sich in einem Zug zeichnen lassen, und war das geheime Erkennungszeichen der *Pythagoreer* (Abb. 19). Bei ihnen hat das regelmäßige Fünfeck vermutlich eine entscheidende Rolle bei der Entdeckung der Inkommensurabilität gespielt. Sie kennen wahrscheinlich zur Einführung der irrationalen Zahlen den Beweis, dass die Seite und die Diagonale eines Quadrats inkommensurabel sind.

Das Pentagramm kommt auch schon auf alten Münzen Kleinasiens und Galliens vor. Den *Kelten* war das Pentagramm heilig, und es heißt nach den *Druiden*, den keltischen Priestern, auch *Drudenfuss*. Dieser Drudenfuss blieb im Mittelalter das Kennzeichen aller geheimen Gesellschaften und kam in den Ruf, dass man mit ihm den Teufel bannen könne. Auf diese Bedeutung wird an der bekannten Stelle in *Goethes „Faust“* angespielt: Mephistopheles als „ein Teil von jener Kraft, die stets das Böse will und stets das Gute schafft“, hat Schwierigkeiten bei der Überwindung des Drudenfusses in Fausts Studierzimmer. In der Architektur der gotischen Maßwerke kommen viele regelmäßige  $n$ -Ecke, so auch das Fünfeck vor.



Abb. 20

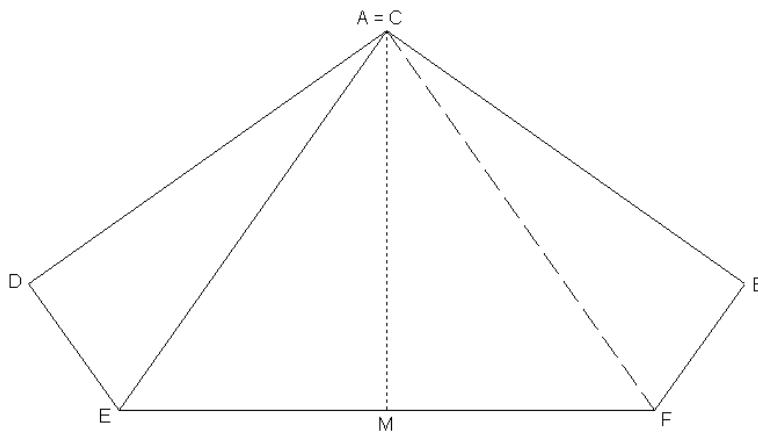
Sogar Briefmarken in der Form eines regelmäßigen Fünfecks gibt es, Abb. 20 zeigt den am 15.8.2002 erschienenen Block aus solchen Marken mit dem Präsidenten und dem Vizepräsidenten der Republik Indonesien.



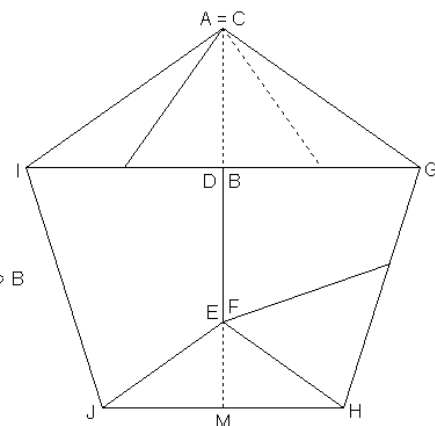
Auch in der belebten Natur kommen regelmäßige Fünfecke vor, *Abb. 21* zeigt Seesterne.

*Abb. 21*

Zum Falten eines Fünfeckes sollten Sie folgende, sehr schnelle Methode versuchen. Sie beginnen wieder mit einem DIN-A4-Blatt ABCD. Falten Sie zunächst die Diagonale AC und dann das Blatt wieder auf. Nun wird die Ecke A auf die Ecke C gefaltet (*Abb. 22*). Werden jetzt die Seiten ED und FB auf die Diagonale MA gefaltet, so entsteht ein Fünfeck (*Abb. 23*). Leider ist es nicht ganz ein regelmäßiges Fünfeck; prüfen Sie nach, wie stark das gefaltete Fünfeck von der Regelmäßigkeit abweicht.



*Abb. 22*



*Abb. 23*

Die Analyse dieser **Näherungskonstruktion für das Fünfeck** ist etwas komplizierter. Für diese Konstruktion ist es wesentlich, dass wir DIN-A-Papier verwenden. Ein DIN-A0-Blatt ist definiert als Rechteck mit Flächeninhalt  $1 \text{ m}^2$  und einem Seitenverhältnis von  $1 : \sqrt{2}$ . Es hat also die Seiten

$$a = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \text{ m} \approx 841 \text{ mm} \quad \text{und} \quad b = \sqrt[4]{2} \text{ m} \approx 1189 \text{ mm}.$$

Das DIN-A0-Blatt wird an der kürzeren Seite zusammengefaltet, und man erhält zwei DIN-A1-Blätter mit halbem Flächeninhalt und wieder dem gleichen Seitenverhältnis und so weiter.

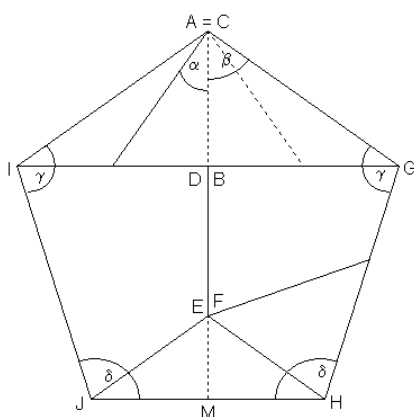
Beim DIN-A4-Blatt sind dann die entstehenden Seiten auf mm gerundet 210 mm und 297 mm lang.

Um die Fünfeckkonstruktion zu untersuchen, werden auf dem nach *Abb. 23* gefalteten Blatt alle Ecken und die Fünfeckwinkel eingezeichnet, wobei gleich verwendet wird, dass die Winkel bei G und I und die Winkel bei H und J aus Symmetriegründen gleich sind (*Abb. 24*). Dann wird das Blatt wie in *Abb. 25* aufgefaltet. Aus dem Seitenverhältnis ergeben sich sofort die ersten beiden Winkel:

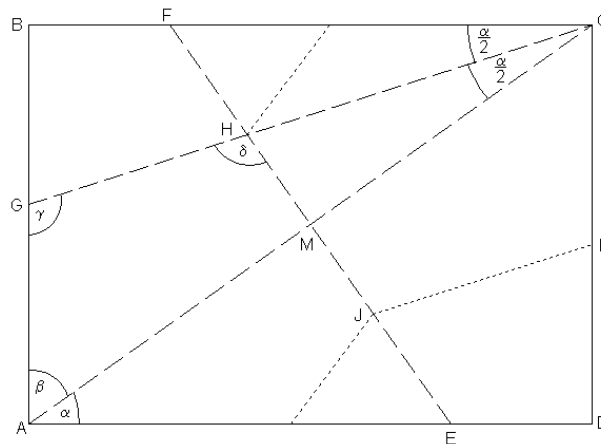
$$\alpha = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \beta = \arctan(\sqrt{2}).$$

Hieraus ergibt sich der erste Fünfeckwinkel bei der oberen Ecke „A = C“ in *Abb. 24* zu

$$\varepsilon = 2\beta = 2 \cdot \arctan(\sqrt{2}) \approx 109,47^\circ.$$



*Abb. 24*



*Abb. 25*

Unter Beachtung, dass CG als Faltlinie die Winkelhalbierende des Winkels BCA ist und unter Verwendung des Winkelsummensatzes im Dreieck und im Viereck folgt, dass alle anderen vier Fünfeckswinkel gleich sind:

$$\gamma = \delta = 90^\circ + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ + \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 107,63^\circ.$$

Der größere ist also ca. 1,7 % größer als der kleinere. Im Vergleich dazu hat das regelmäßige Fünfeck Winkel von  $108^\circ$ . Aus *Abb. 25* kann man auch leicht durch Winkelbetrachtungen in den verschiedenen Dreiecken die Seitenlängen des Fünfecks berechnen, wobei wir die kürzere Seite des Rechtecks auf 1 und damit die längere auf  $\sqrt{2}$  normieren. Es gilt mit  $\alpha$  wie oben

$$\overline{AG} = \overline{AI} = \overline{JH} = \sqrt{3} \cdot \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \approx 0,5505, \quad \overline{GH} = \overline{IJ} = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \approx 0,5752,$$

d. h. die längere Seite ist ca. 4,5 % länger.

## 6.4 Der Fünfeckknoten

Diese Faltkonstruktion ist besonders ansprechend, und mit ihr erhalten wir ein exaktes regelmäßiges Fünfeck. Die *Abbildung 26* zeigt, wie einfach dies geht: Nehmen Sie einen langen und schmalen Papierstreifen und machen aus ihm einen Knoten. Wenn Sie ihn sorgfältig platt



Abb. 26

drücken, so entsteht ein Fünfeck. Führen Sie dies durch und begründen Sie, dass es sich um ein regelmäßiges Fünfeck handelt!

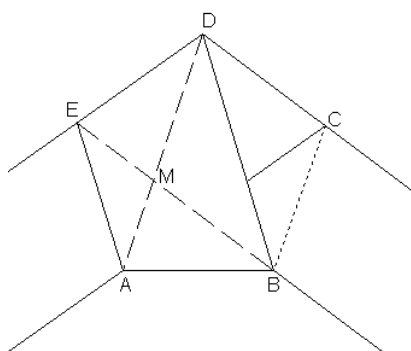


Abb. 26

Zur **Analyse der Fünfeckknoten-Faltung** geht man zunächst davon aus, dass ABCDE wirklich ein reguläres Fünfeck ist. Dann ist das Viereck ABDE in *Abb. 27* ein gleichschenkliges Trapez mit Winkeln von  $108^\circ$  bei A und E und von  $72^\circ$  bei B und D und mit Seitenlängen  $\overline{AB} = \overline{AE} = \overline{ED}$ . Der Winkelsummensatz in den gleichschenkligen Dreiecken ADE und ABE liefert, dass AD Winkelhalbierende bei D und BE Winkelhalbierende bei B ist. Also sind die Dreiecke ABD und EBD kongruente gleichschenklige Dreiecke mit Winkeln von  $72^\circ$  bei A und B und von  $36^\circ$  bei D und analog beim

eck. Nun sollten Sie bei Ihrem Fünfeckknoten ~~die~~ ~~Namen~~ ~~Adlton~~ ~~und~~ ~~Siem~~ ~~Her~~ ~~ihren~~ Knoten wieder auffalten und Ecken, die „übereinander“ liegen, mit dem selben Buchstaben bezeichnen. So erhalten Sie eine Figur wie in *Abb. 28*.

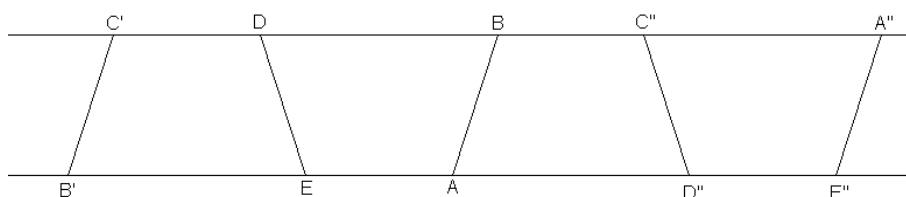


Abb. 28

Jetzt wird die Konstruktion klar: Man beginnt auf einem neuen Papierstreifen mit dem Konstruieren eines gleichschenkligen Trapezes ABDE mit den Winkeln von  $108^\circ$  bei A und E und von  $72^\circ$  bei B und D und mit den Seitenlängen  $\overline{AB} = \overline{AE} = \overline{ED}$ . Die anderen drei zum ersten kongruenten Trapeze entstehen wie in *Abb. 28*. Nun faltet man zuerst an der Kante AB, dann an der Kante C''D'' und schließlich an der Kante DE. Aufgrund der Winkel passt alles exakt zum regulären Fünfeckknoten zusammen. Um einen „richtigen“ Knoten zu erhalten, muss noch das eine freie Ende des Papierstreifens geeignet durch eine Schlaufe gezogen werden.

## 6.5 Das regelmäßige Siebeneck

Bei gotischen Maßwerken findet man viele regelmäßige n-Ecke, jedoch nur sehr selten ein regelmäßiges Siebeneck. Die folgenden beiden Beispiele stammen von dem Münster in Dobeban, das früher ein Zisternienser-Kloster war. In der Zahlenmystik der Zisternienser spielte die Zahl Sieben eine besondere Rolle. *Abb. 29* zeigt ein Detail der Eingangsfassade, *Abb. 30* ein Siebeneck in dem herrlichen geschnitzten Chorgestühl.



Abb. 29



Abb.30

Das Kreisteilungspolynom  $F_7(x) = x^6 + x^5 + \dots + x + 1$  ist irreduzibel von Grad 6, es gibt also keine exakte Faltkonstruktion für das 7-Eck. Mit Falten kann man zusätzlich zu den klassischen Konstruktionswerkzeugen nur die Konstruktion mit einem Einschiebelineal simulieren, d. h. man kann nur solche Konstruktionen ausführen, deren Algebraisierung auf die Nullstellen von Polynomen vom Grad  $\leq 3$  führt. Unsere Konstruktion (Hilton & Petersen, 2003) wird also eine Näherungskonstruktion sein, die aber beliebig genau sein wird.#

Wir gehen schrittweise vor:

Wenn wir einen (beliebig lang gedachten) Papierstreifen (mit parallelen Randgeraden  $a$  und  $b$ ) mit äquidistanten Markierungen für die Punkte  $A_i, B_i, C_i, i=1, 2, \dots$ , wie in *Abb. 31* versehen

können, wobei der Winkel  $\alpha$  den Wert  $\alpha = \frac{\pi}{n}$  hat, so können wir ein reguläres  $n$ -Eck falten.

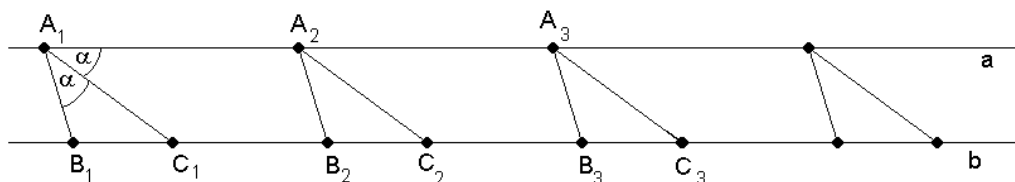


Abb. 31

Falten wir nämlich zuerst an  $A_1C_1$ , dann an  $A_1B_1$ , so haben wir um einen Winkel von  $2\alpha = \frac{2\pi}{n}$  gefaltet (vgl. *Abb. 32.a* und *b*)

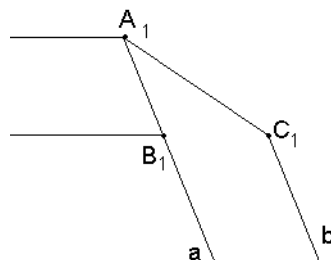


Abb. 32.a

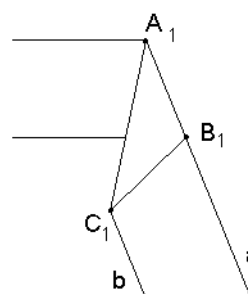


Abb. 32.b

Setzen wir den Faltvorgang mit den Ecken  $A_2, A_3, \dots$  fort, so fällt die Ecke  $A_n$  genau auf die Ecke  $A_1$ , nachdem wir  $n$ -mal um einen Winkel von  $2\alpha$ , also insgesamt um den Winkel  $n \cdot 2\alpha = n \cdot \frac{2\pi}{n} = 2\pi$  gefaltet haben. Wir haben also ein reguläres  $n$ -Eck erhalten.



Abb. 33

In Abb. 33 habe ich und  $\alpha = 36^\circ = \frac{\pi}{6}$  gearbeitet und den entsprechenden Papierstreifen zum regelmäßigen Fünfeck gefaltet.

Um ein reguläres 7-Eck, das erste n-Eck, das *nicht* mit Zirkel und Lineal zu konstruieren ist, zu falten, nehmen wir zunächst an, dass wir – woher auch immer – auf unserem von den parallelen Geraden a und b begrenzten Papierband einen ersten Winkel von  $\beta = \frac{2\pi}{7}$  haben (Abb. 34).

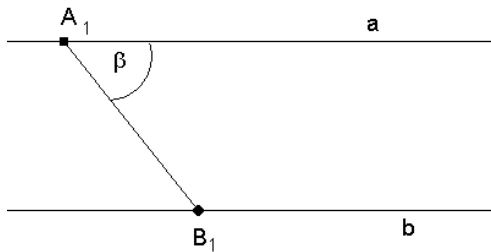


Abb. 34

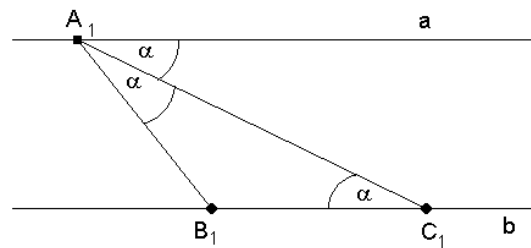


Abb. 35

Das Falten der Winkelhalbierenden von  $\beta$  liefert die beiden Winkel  $\alpha = \frac{\pi}{7}$  bei  $A_1$  und den Punkt  $C_1 \in b$  (Abb. 35). Als Wechselwinkel gilt auch  $\sphericalangle(A_1C_1B_1) = \alpha = \frac{\pi}{7}$ .

Das Falten der Winkelhalbierenden des Winkels  $\sphericalangle(b, C_1A_1)$  erzeugt die in Abb. 36 angegebenen Winkel und den Punkt  $A_2 \in a$ .

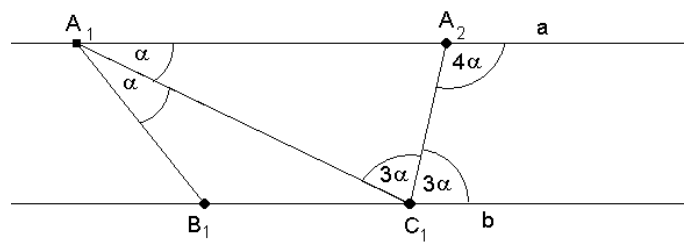


Abb. 36

Schließlich erzeugen die Winkelhalbierenden des Winkels  $\sphericalangle(C_1A_2, a)$  den Punkt  $B_2$ , die Winkelhalbierende des Winkels  $\sphericalangle(B_2A_2, a)$  der Punkt  $C_2$  und die in Abb. 37 angegebenen Winkel.

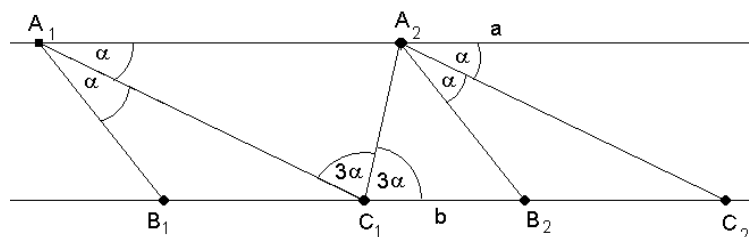


Abb. 37

Wir können also mit dem *einen* gegebenen Winkel  $\beta = \frac{2\pi}{7}$  eine Figur wie in *Abb. 31* herstellen und damit das reguläre 7-Eck falten.

Leider ist es unmöglich, mit dem exakten Winkel  $\beta = \frac{2\pi}{7}$  zu starten. Der Ausgangswinkel  $\beta$  kann also nur eine Näherung sein, etwa  $\beta = \frac{2\pi}{7} + 2\varepsilon$  mit  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ . Analysieren wir in den *Abbildungen 34 bis 37*, wie sich der Fehler  $\varepsilon$  fortpflanzt! In *Abb. 35* gilt für den durch die Winkelhalbierende erzeugten Winkel  $\alpha = \frac{\pi}{7} + \varepsilon$ . Damit gilt in *Abb. 36* für den Winkel bei  $C_1$

$$\sphericalangle (A_1C_1, b) = \pi - \alpha = \frac{6\pi}{7} - \varepsilon,$$

und die durch die Winkelhalbierende entstehenden Winkel haben den Wert

$$\sphericalangle (A_2C_1A_1) = \sphericalangle (b, C_1A_2) = \frac{3\pi}{7} - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Also hat in *Abb. 36* der Winkel bei  $A_2$  den Wert

$$\sphericalangle (C_1A_2, a) = \frac{4\pi}{7} + \frac{\varepsilon}{2}$$

und die beiden in *Abb. 37* mit  $\alpha$  bezeichneten, durch 2-fache Winkelhalbierung entstandene Winkel mit Scheitel  $A_2$  haben den Wert

$$\sphericalangle (BA_2C_2) = \sphericalangle (C_2A_2, a) = \frac{\pi}{7} + \frac{\varepsilon}{2^3}.$$

Insgesamt hat sich ergeben, dass die exakte Faltkonstruktion der Punkte  $A_2, B_2, C_2$  aus den Punkten  $A_1, B_1, C_1$  den Fehler um den Faktor  $\frac{1}{2^3}$  verkleinert hat! Jede weitere Fortsetzung der Faltprozedur reduziert den Winkelfehler um einen weiteren Faktor  $\frac{1}{2^3}$ , die Faltkonstruktion führt also mit kubischer Konvergenzgeschwindigkeit zum regelmäßigen 7-Eck!

## Literatur

Henn, H.-W.: Origamics – Papierfalten mit mathematischem Spürsinn. – In: Die neue Schulpraxis, H. 6/7, 2003<sup>1</sup>, S. 49 – 53

Henn, H.-W.: Elementare Geometrie und Algebra. – Wiesbaden: Vieweg, 2003

P. Hilton, P. & J. Pedersen: The unity of mathematics: A Casebook comprising practical geometry, number theory and linear Algebra. – In: Teaching Mathematics and Computer Science, 1, 2003, H. 1, S. 1 – 34