

SZILÁGYINÉ SZINGER Ibolya:

Die Entwicklung geometrischer Begriffe im Mathematikunterricht der Grundstufe (Das Quadrat und das Rechteck)

Theoretische Erläuterungen

Der orientierte Prozess, in dem das Kleinkind geometrische Kenntnisse erwirbt, fängt schon im Kindergarten an. Mit der Beobachtung der Gegenstände in der Umwelt fängt die Bildung des geometrischen Objektbegriffes an (z.B. geometrische Körper, ebene Figuren). Die Feststellung von klassenbildenden Merkmalen, die für diese Objekte charakteristisch sind, bedeutet schon eine höhere Stufe des Erkenntnisses. Zahlreiche Studien befassen sich mit dem Prozess des geometrischen Erkenntnisses, aber im Bezug auf das untersuchte Material folgen wir den Ansichten von P-H. van Hiele.

P-H. van Hiele hat den Prozess des geometrischen Erkennens in 5 Stufen gegliedert.

1. Stufe: Auf dieser Niveaustufe des globalen Erkennens der Formen betrachtet das Kind die geometrischen Objekte als Einheiten. Sie erkennen die Gestalten leicht an ihrer Form, lernen die Namen der Gestalten, aber sie fassen die Beziehung zwischen dem Objekt und seinen Anteilen nicht auf. Im Würfel erkennen sie den Quader nicht, im Quadrat können sie das Rechteck nicht entdecken, weil diese für sie ganz verschiedene Sachen sind.
2. Stufe: Auf der zweiten Niveaustufe der Gestaltsanalyse zerlegt das Kind die Gestalten in ihre Bestandteile und stellt sie wieder zusammen. Es erkennt die Flächen, die Kanten und die Ecken der geometrischen Körper. An den Seitenflächen der Körper erkennt es ebene Figuren, die von Kurven, Strecken und Punkten begrenzt sind. Auf dieser Stufe spielt die Beobachtung, das Messen, Falten, Kleben, Zeichnen, Modellieren, Parkettlegen und die Verwendung des Spiegels eine wichtige Rolle. Durch diese konkreten Aktivitäten kann der Schüler die Eigenschaften von Objekten feststellen bzw. aufzählen (z.B. Parallelität und Rechtwinkeligkeit der Seiten, bzw. der Flächen, Symmetrie, etwas hat rechten Winkel usw.), aber er definiert nichts, kann die logische Verbindung zwischen den Eigenschaften nicht erkennen. Obwohl das Kind die gemeinsamen Merkmale des Quadrats und des Rechteckes erkennt, dürfen wir von ihm nicht erwarten, dass es auf die Schlussfolgerung kommt, dass das Quadrat ein Rechteck ist.
3. Auf der Niveaustufe 3 finden die Schüler Zusammenhänge zwischen den Eigenschaften eines gegebenen Objekts und verschiedener Objekten. Die Möglichkeit des schlussfolgernden Denkens taucht auf, während sie aus einer Eigenschaft der Gestalt auf das andere folgern. Sie verstehen die Rolle der Definition. Der logische Folgerungsprozess wird aber von dem Lehrbuch bzw. dem Lehrer gesteuert. Ein Anspruch nach Beweisung wird herausentwickelt, aber es gilt nur für die Gestalten. Auf dieser Stufe wird das Quadrat schon als Rechteck betrachtet.
4. Die vierte Niveaustufe, d.h. die Bestrebung nach einem vollkommenen logischen Aufbau, bzw. Stufe 5, d.h. der Aufbau von Axiomensystemen werden schon in der Sekundarstufe und in der Hochschulbildung erzielt.

Jede Stufe des Van Hiele Modells erweitert und fördert die Denkungsweise, die in der früheren Stufe herausentwickelt wurde. Während des stufenweisen und kontinuierlichen Übergangs werden die entsprechenden mathematischen Begriffe gelernt. Dieser Prozess wird von dem Unterricht, von Unterrichtsmaterial und Unterrichtsmethoden eigenartig beeinflusst. Um das richtige geometrische Denken den Schülern beizubringen, dürfen wir keine einzige Stufe überschreiten. Jede Entwicklungsstufe hat eine spezielle Sprache, ein Symbolsystem und einen logischen Aufbau. Eine wichtige didaktische Behauptung der van Hiele Theorie ist, dass es von den Schülern auf einer bestimmten Stufe nicht zu erwarten ist, dass sie die

Instruktionen einer höheren Stufe verstehen. Das ist laut van Hiele der häufigste Grund für das Versagen des Mathematikunterrichts.

Die Forschungsfrage

Unsere Forschungsfrage ist, wie das Verhältnis unseres Geometrieunterrichts insbesondere die Darstellung der Begriffe vom Quadrat und Rechteck in der Grundschule zu den geometrischen Stufen des van Hiele Modells ist, weiterhin wie wirkungsvoll die konkreten handlungsorientierten Einsätze zur Bildung der Begriffe Quadrat und Rechteck beitragen.

Die Hypothese

In der Primarstufe (Klasse 1-4) sind im Geometrieunterricht die Niveaustufen 1 und 2 von van Hiele zu erreichen. Bis Ende der Primarstufe ist die dritte Stufe nicht zu erreichen. Es sind zwar Begriffsklassen vorhanden (z.B. Quadrat, Rechteck), aber es gibt keinen Zusammenhang zwischen ihnen. Die Schüler verstehen die Teilmengenrelation noch nicht.

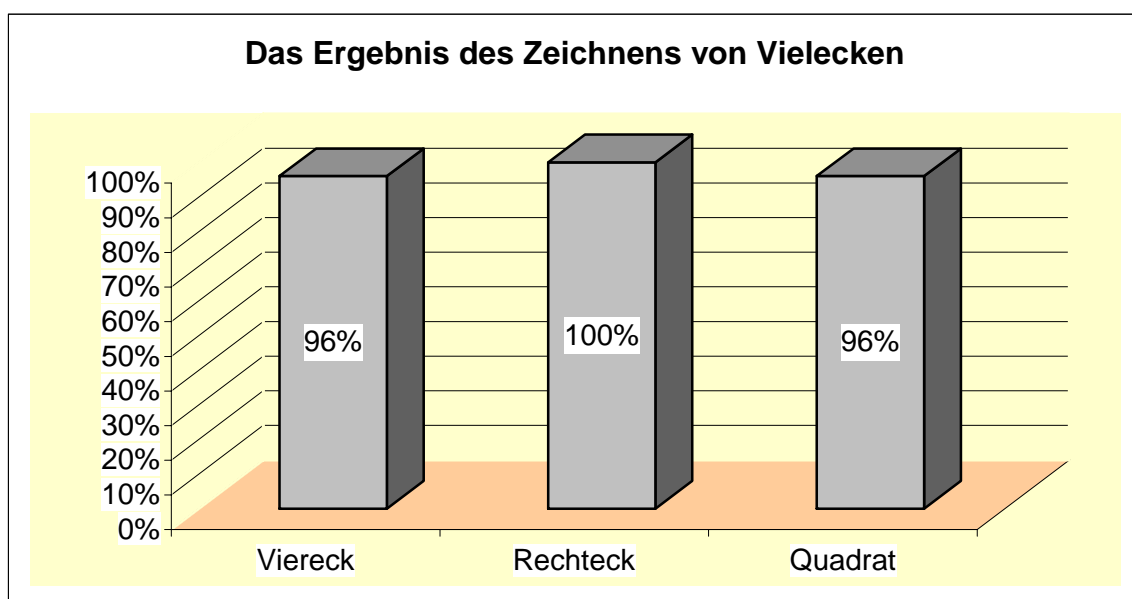
Hintergrund der Forschung

Wir haben ein Unterrichtsexperiment in Mai und Juni 2006. durchgeführt. Das Lehrmaterial und die Bearbeitungsmethodik wurden von der Autorin geplant, und sie hat sich in den Unterricht aktiv eingeschaltet. Der Unterricht fand in der Klasse 4.c einer Grundschule in Baja statt, geleitet von einer Fachlehrerin. Während des Unterrichts haben wir die Veränderung von mehreren geometrischen Begriffen (Quadrat, Rechteck, Parallelität, Rechtwinkeligkeit, Symmetrie) untersucht, aber hier werden wir nur die Bildung der Begriffe von Quadrat und Rechteck darstellen.

Das Schulexperiment hat 16 Lehrstunden gedauert und hat den Unterricht anhand des van Hiele Modells verwirklicht. In der ersten Stunde ließen wir die 26 Schüler der 4. Klasse einen Pretest schreiben. Dadurch haben wir festgestellt, dass ein Übergang von der ersten Stufe (Globales Erkennen von geometrischen Objekten) auf die zweite Stufe (Analyse von Objekten), bzw. die Weiterbildung des geometrischen Denkens möglich sind.

Die Aufgaben des Pretests und ihre Auswertung

In der ersten Aufgabe sollten die Kinder ein Viereck, ein Quadrat und ein Rechteck zeichnen. Die Auswertung wird von der nächsten Abbildung dargestellt.

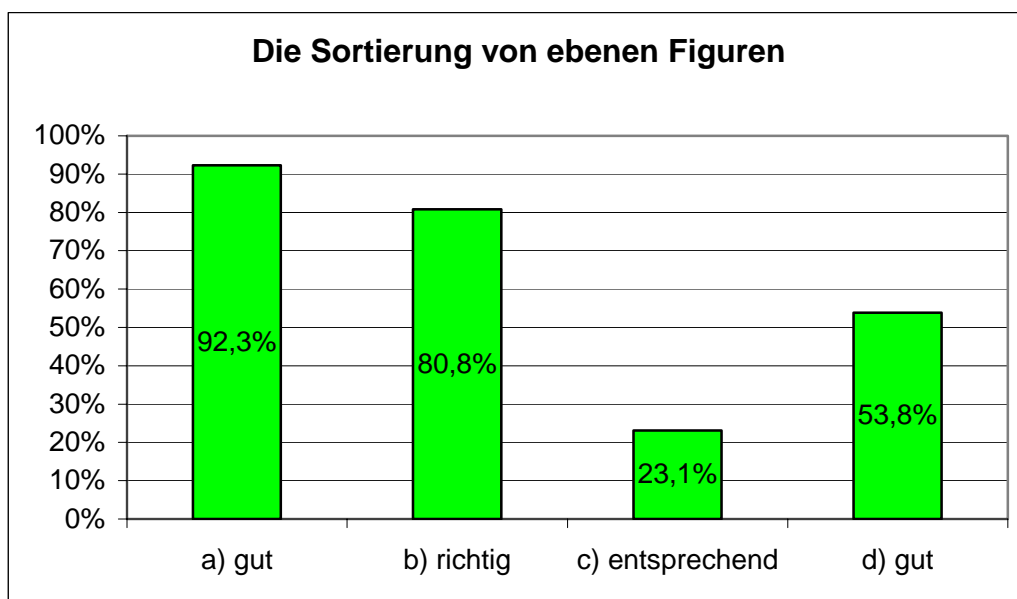
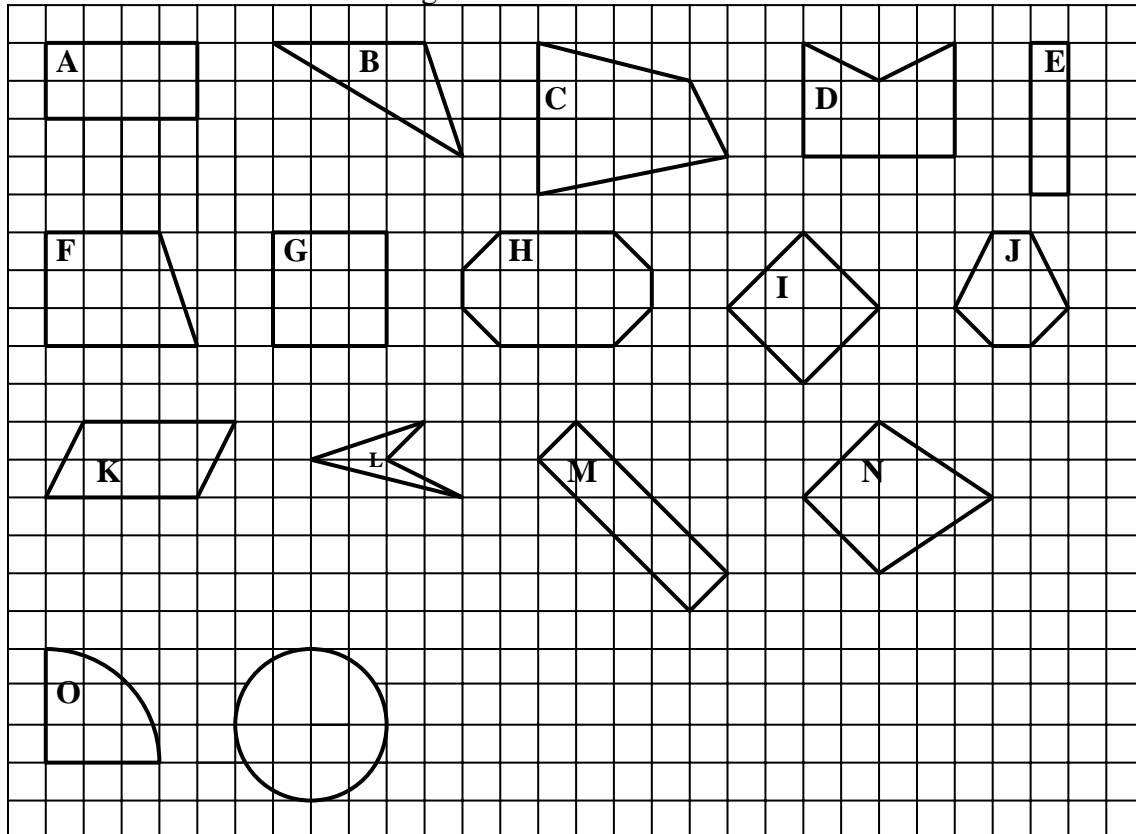


Die Kinder haben die Aufgabe erfolgreich gelöst, nur ein Schüler konnte kein Viereck, und einer konnte kein Quadrat zeichnen. Eine relative Vielzahl (42%) von Schülern hat ein Quadrat als Viereck gezeichnet. Zwischen diesen Begriffen gibt es für diese Schüler keinen Unterschied.

In der zweiten Aufgabe sollten die Schüler von 16 ebenen Figuren diejenigen aussortieren, die:

- a) von geraden Linien begrenzt sind;
- b) Vierecken sind;
- c) Rechtecken sind;
- d) Quadrate sind.

Sie sollten von diesen ebenen Figuren wählen:



Man sieht von den Daten, dass im Fall des Rechteckes und des Quadrats zum Erkennen der Begriffe weitere Übungen nötig sind. Bei der Aufgabe c) hat nahezu 20% der Schüler die Quadrate nicht zu den Rechtecken eingeordnet, hatte aber keine anderen Fehler. Diese Lösungen wurden auch als entsprechend betrachtet. Beinahe 90% der Kinder hat das Quadrat nicht als Rechteck erkannt. Das entspricht den beiden ersten Niveaustufen des van Hiele Modells.

Das Unterrichtsexperiment

Als wir das Lehrmaterial zusammengestellt haben, haben wir vor Augen gehalten, dass die Kinder die geometrischen Begriffe zuerst durch sinnliche Wahrnehmung, durch Spieltätigkeit und Manipulation mit Objekten, dann durch visuelle Wahrnehmung (Zeichnen) und zum Schluss auf abstrakte Weise, mit Hilfe der Muttersprache entdecken sollen.

Aufgaben zur Handlung mit Objekten:

- a) Wie kann man am einfachsten aus einem Rechteck ein Quadrat ausschneiden?
- b) Schneiden wir das Rechteck und das Quadrat entlang ihrer Diagonalen in zwei Dreiecken, und schaffen wir neue ebene Figuren daraus!
- c) Schneiden wir mit je einem Schnitt verschiedene ebene Figuren aus einem Papierstreifen und benennen wir die Objekte!
- d) Schneiden wir aus dem Papierstreifen Rechtecke mit gegebener Höhe und unterschiedlichen Längen!

Usw.

Aufgaben zur visuellen Tätigkeit:

- a) Zeichnen von Quadraten und Rechtecken auf dem quadratischen Punktgitter.
- b) Zeichnen von verschiedenen Vierecken auf dem quadratischen Punktgitter.
- c) Zeichnen von verschiedenen Dreiecken auf dem quadratischen Punktgitter.
- d) Zeichnen von parallelen und senkrechten Geradenpaaren auf dem quadratischen Punktgitter.
- e) Bemalen der parallelen Seitenpaare von verschiedenen ebenen Figuren, die Markierung der rechten Winkel.
- f) Zeichnen von Vierecken mit gegebenen Eigenschaften.

Usw.

Nachdem man in den ersten beiden (empirischen) Ebenen Erfahrungen gemacht hatte, fand die Zusammenfassung der Eigenschaften von geometrischen Objekten schon *auf der abstrakten Ebene der Muttersprache* statt. Ein beliebter Spiel der Kinder ist das Barkochba, das u.a. für die Übung und Einprägung von Eigenschaften ebener Figuren geeignet ist.

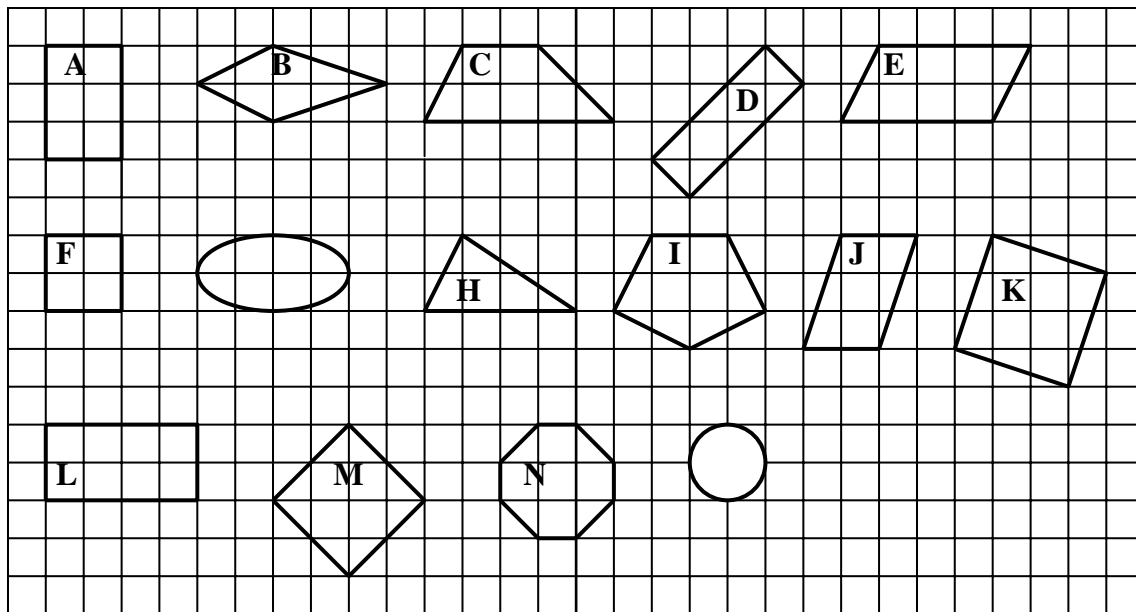
Die Aufgaben des Posttests und ihre Auswertung

Wir haben unser Experiment mit einem Test abgeschlossen. Der Testbogen wurde von 25 Schülern der Klasse 4.c ausgefüllt. In der Klasse 4.a haben noch 23 Schüler, und in der Klasse 4.b weitere 24 Schüler die Aufgaben gelöst. In den beiden letzten Klassen hat nicht dieselbe Fachlehrerin unterrichtet.

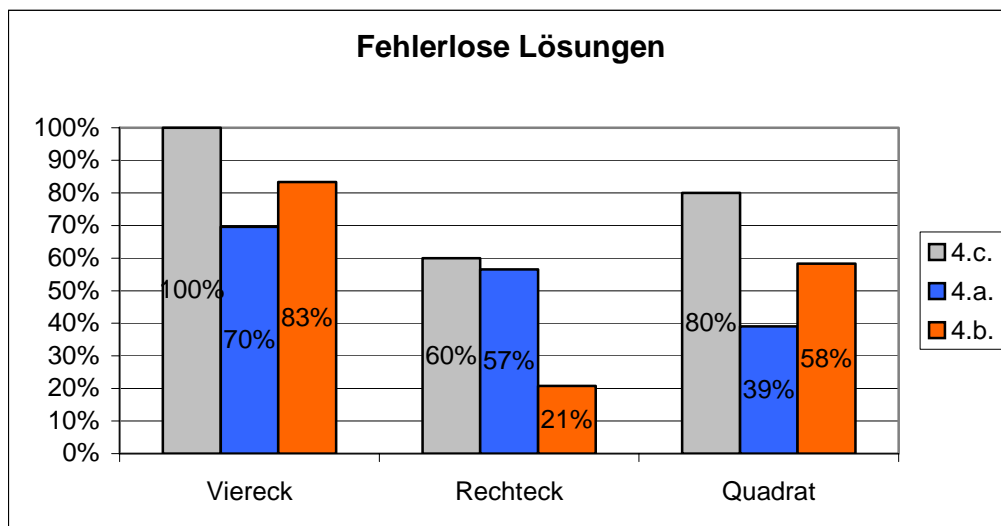
In der Aufgabe bezüglich der Erkennung der Begriffe von Viereck, Rechteck und Quadrat sollte man von 15 ebenen Figuren

- a) die Vierecke,
- b) die Rechtecke,
- c) die Quadrate aussortieren.

Man sollte folgende Menge von ebenen Figuren einordnen:



Das Ergebnis der Aufgabenlösung stellt das folgende Diagramm dar:



Die Erkennung von Vierecken war in der Experimentalklasse fehlerlos. 52% der Schüler hat zwar die Quadrate nicht zu den Rechtecken eingeordnet, aber sie hatten keine anderen Fehler gemacht. Im Vergleich zu den 20% des Pretests ist die Entwicklung erheblich. 90% der Kinder betrachtet das Quadrat immer noch nicht als Rechteck. Diese Proportionen finden wir auch in den Kontrollgruppen. Diese Daten unterstützen unsere Hypothese, dass man bis Ende der Primarstufe auf die dritte Niveaustufe vom van Hiele Modell nicht übertreten kann, nur die zwei ersten Stufen sind real erreichbar.

Schlussfolgerung

Wir denken, dass der von der Autorin gesteuerte Unterricht zur Vertiefung der Begriffe Rechteck und Quadrat wirkungsvoll beigetragen hat. Es wurde auch vom Vergleich der Ergebnisse des Pretests und des Posttests unterstützt. Die Wirksamkeit wurde auch dadurch bewiesen, dass im Vergleich zu den zwei Parallelklassen die Ergebnisse in der Experimentalklasse gelegentlich wesentlich besser waren. Es war auf den Diagrammen gut zu sehen. Unsere Behauptungen galten nur für die beobachteten - nicht repräsentativen - Stichproben, deshalb haben wir sie statistisch nicht geprüft.

Auf die Frage, ob das Quadrat für die Schüler der 4. Klasse zugleich ein Rechteck ist, können wir aufgrund des Experiments folgendes antworten: für die meisten Schüler ist das Quadrat kein Rechteck, denn sie können höchstens die Niveaustufe 2 von van Hiele erreichen.

Bibliographie

Ambrus András: Bevezetés a matematikadidaktikába. Budapest, 1995, ELTE Eötvös Kiadó.

C. Neményi Eszter - Káldi Éva: Matematika tankönyv általános iskola 4. osztály. Budapest, 2005, Nemzeti Tankönyvkiadó.

Falus Iván (szerk.): Bevezetés a pedagógiai kutatás módszereibe. Budapest, 2000, Műszaki Könyvkiadó.

Peller József: A matematikai ismeretszerzési folyamatról. Budapest, 2003, ELTE Eötvös Kiadó.

Peller József: A matematikai ismeretszerzés gyökerei. Budapest, 2003, ELTE Eötvös Kiadó.

Piskalo, A. M.: Geometria az 1-4. osztályban. Budapest, 1977, Tankönyvkiadó.

Pólya György: A gondolkodás iskolája How to solve it, Budapest, 2000, Akkord Kiadó.

Skemp, Richard R.: A matematikatanulás pszichológiája The Psychology of Learning Mathematics. Budapest, 1975, Gondolat Kiadó.

Teppo, Anne: Van Hiele Levels of Geometric Thought Revisited. Mathematics teacher, March 1991.