

Thomas SCHILLER, Linz

GPS- Beispiele im Mathematikunterricht

Beispiele mit Realitätsbezug sind für SchülerInnen wichtig, damit sie den Sinn der Mathematik leichter erkennen können.

Ich habe mit meiner Diplomarbeit versucht, das sehr realitätsnahe Thema „Global Positioning System“ für den Unterricht so aufzubereiten, dass der Schwierigkeitsgrad der Beispiele schrittweise erhöht wird und am Ende den SchülerInnen noch ein weiterer Ausblick auf die Realität gegeben werden kann. Das Thema eignet sich gut für offenen und fächerübergreifenden Unterricht (z. B. Geographie (verschiedene Erdmodelle, Kartographie), Informatik (kleine Programme zur leichteren Berechnung von Flächen etc.), darstellende Geometrie (Kugeln schneiden), Physik (Relativitätstheorie, Bestimmung der Signallaufzeit).

Funktionsprinzip von GPS

Die Positionsbestimmung bei GPS funktioniert nach dem Prinzip der Trilateration, also der Entfernungsmessung zu drei Punkten (mit bekannten Koordinaten). Dabei wird die Entfernung nach dem Prinzip „Time of Arrival“ gemessen, also mit demselben Prinzip, wie man die Entfernung eines Gewitters bestimmt (Entfernung = Signalgeschwindigkeit * Signallaufzeit).

Misst man bei der zweidimensionalen Positionsbestimmung (also das Prinzip von GPS in der Ebene betrachtet) die Entfernung zu den „Satelliten“ mit bekannten Koordinaten, weiß man, dass man sich auf Kreislinien um diese mit der gemessenen Entfernung als Radius befindet. Nach dem Schnitt der Kreise kann man die Koordinaten der eigenen Position bestimmen. Dieses Prinzip lässt sich mit den SchülerInnen auch aktiv als Rollenspiel simulieren, bei dem SchülerInnen die Satelliten repräsentieren und weitere SchülerInnen die Satelliten an einer Schnur (mit der zuvor gemessenen Entfernung als Länge) umkreisen. Dadurch wird das Prinzip verinnerlicht und die SchülerInnen erfahren selbstständig, wie viele Satelliten zur Positionsbestimmung notwendig sind. Der Schnittpunkt der Kreise lässt sich bei angenehmen (unrealistischen) Zahlen händisch berechnen, indem die Differenzen von Kreisgleichungen betrachtet werden, wodurch man lineare Gleichungen erhält.

Die dreidimensionale Positionsbestimmung ist ein Schritt näher zur Realität. Hier werden Kugeln geschnitten. Zur Visualisierung und zum Rechnen bietet sich spätestens ab hier der Computereinsatz an, vor allem, weil man ab nun unbedingt mit realistischen Daten (z. B. echte Satellitenpositionen – siehe Link in Literaturliste) arbeiten sollte.

Fehlerquellen bei GPS

Kein System ist perfekt, auch bei GPS gibt es Störquellen und Ungenauigkeiten. Diese lassen sich im Unterricht mit Hilfe der analytischen Geometrie analysieren. Der Schritt, Fehlerquellen mit zu berücksichtigen, ist ein weiterer Schritt in Richtung Realität, der natürlich auch den Schwierigkeitsgrad möglicher Beispiele erhöht. Einige Fehlerquellen wären etwa: Abweichungen der Satelliten von ihren Umlaufbahnen wegen leichter Gravitationsschwankungen (Sonne, Mond, ...), Anzahl sichtbarer Satelliten (sind genügend für Positionsbestimmung verfügbar?), Mehrwegeeffekt (Reflexion des GPS-Signals an einem Gebäude o. ä., bevor es zum Empfänger gelangt), atmosphärische Effekte (und dadurch Ablenkung und Abbremsung der Satellitensignale), Satellitengeometrie (Position der Satelliten vom Empfänger aus gesehen), Uhrenfehler (Ungenauigkeit der Quarzuhr im Empfänger), Auswirkungen der Relativitätstheorie, ...

Uhrenfehler

Jeder GPS-Satelliten besitzt mehrere Atomuhren. Alle Satelliten sind untereinander bestens synchronisiert. Beim GPS-Empfänger kann man aus Kosten- und Gewichtsgründen keine Atomuhren einbauen, weshalb hiergewöhnliche Quarzuhren verwendet werden. Atomuhren besitzen eine relative Genauigkeit von 10^{-12} , pro Tag gehen die Uhren also maximal 10^{-7} Sekunde falsch. Der daraus entstehende Fehler bei der Positionsbestimmung (falsch gemessene Entfernungen) kann durch die Bodenstationen, welche die Satelliten überwachen, sehr gut korrigiert werden und bleibt vernachlässigbar. Eine Quarzuhr hat eine relative Genauigkeit von 10^{-6} was pro Tag einen Fehler von ca. 10^{-1} Sekunden ergibt. Der Fehler in der Positionsbestimmung (Laufzeit wird ja mit Lichtgeschwindigkeit (=Signallaufzeit) multipliziert) würde im „worst case“ ca. 26000 km ergeben. Auf Grund der ungenauen Uhr im Empfänger werden statt der eigentlichen Entfernungen so genannte Pseudoentfernungen zu den Satelliten gemessen, die also (je nach Fehler der Uhr) etwas länger oder kürzer als tatsächlich sind. Mathematisch betrachtet erhalten wir in unserem eigentlichen Gleichungssystem mit drei Gleichungen (Kugelgleichungen, dreidimensionale Koordinaten als Unbekannte) noch eine weitere Unbekannte hinzu. Um nun die Position (und den Uhrenfehler) zu berechnen, wird somit eine vierte Entfernungsmessung (Gleichung) benötigt.

Der Uhrenfehler lässt sich im Unterricht im zweidimensionalen Fall etwa mit einer dynamischen Geometriesoftware gut veranschaulichen. Durch einen Schieberegler könnte man den Fehler der Empfängeruhr einstellen. Das Verändern des Fehlers führt zu unterschiedlichen Kreisradien. Die Uhr ist dann richtig eingestellt, wenn sich die Kreise tatsächlich in einem Punkt

schneiden. Dass der Uhrenfehler (wenn ein GPS- Empfänger mit Satelliten verbunden ist) genau ausgerechnet werden kann ist auch der Grund, weshalb man die Uhr beim Empfänger nicht einstellen muss. Sie wird ja quasi mit den Atomuhren der Satelliten synchronisiert.

Mehrwegeffekt, Satellitengeometrie

Beim Mehrwegeffekt gelangt das Signal nicht direkt zum Empfänger, sondern wird zuvor etwa an einem Gebäude reflektiert (siehe Abb. 1). Dadurch wird eine längere Entfernung gemessen, als der Satellit tatsächlich entfernt wäre. Durch diesen Effekt entsteht ein Fehler von wenigen Metern. Im Unterricht soll man hier unbedingt mit realistischen Positionsdaten (sowohl Satelliten, als auch Empfänger) an dieses Beispiel gehen. Je nach dem, von welchem Satelliten man das Signal durch Reflexion an einem Gebäude (etwa rechts neben der Position) verfälscht, wird der entstandene Fehler sein unterschiedlich groß sein. Hier spielt nämlich auch die Satellitengeometrie eine wichtige Rolle.

Unter Satellitengeometrie wird die Position der Satelliten vom Empfänger aus betrachtet. Auf Grund der Ungenauigkeiten durch die verschiedensten Fehlerquellen können wir nicht davon ausgehen, dass sich der Empfänger genau auf Kreislinien befindet, sondern eher auf Kreisringen. Befinden sich nun zwei Satelliten wie in Abb. 2 vom Empfänger aus betrachtet eher hintereinander, so wird die Schnittfläche zwischen den Kreisringen sehr groß. Würde zwischen den Satelliten vom Empfänger aus gesehen ein Winkel von ca. 90° bestehen, so wäre die Schnittfläche sehr klein (und quadratähnlich). Je nachdem wie günstig der Satellit steht, dessen Signal zur Simulierung des Mehrwegeffekts verfälscht wird, desto stärker wirkt sich der Fehler auch auf die Positionsbestimmung aus.

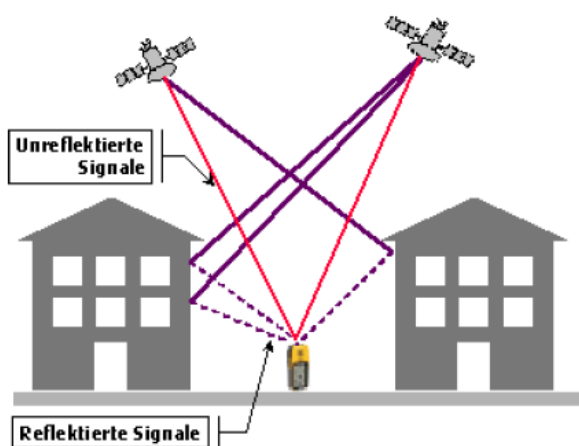


Abb. 1 (Mehrwegeffekt)

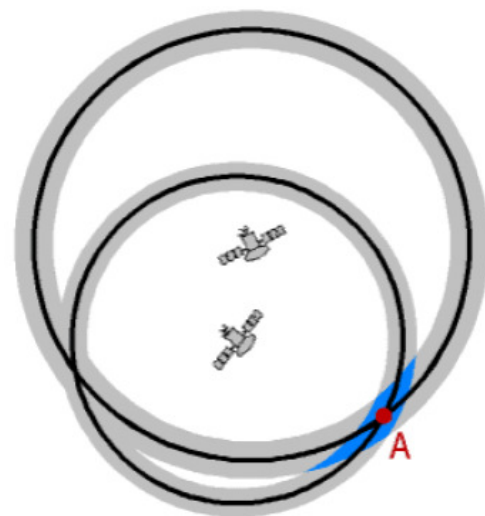


Abb. 2 (Satellitengeometrie)

Geschwindigkeitsbeispiele

Man hört oft, dass der Autotachometer relativ ungenau ist. Ich habe mich nun gefragt, wie genau denn die Geschwindigkeitsanzeige von Navigationsgeräten sei. Dies lässt sich im Unterricht mit Hilfe der analytischen Geometrie gut analysieren. Bei den Beispielen zur Geschwindigkeit habe ich angenommen, dass die Position (und die Anzeige der Daten) vom Autonavigationsgerät einmal pro Sekunde aktualisiert wird.

Genauigkeit allgemein: Wir betrachten ein Straßenstück, das mit 100 km/h innerhalb einer Sekunde befahren wird. Unter der extremen Annahme, dass bei der ersten Positionsbestimmung eine kleine Abweichung passierte und bei der zweiten derselbe Fehler, jedoch in die entgegengesetzte Richtung (also etwa ca. 6 Meter vor der eigentlichen Position, beim zweiten Mal ca. 6 Meter danach) weicht die Geschwindigkeitsanzeige mit GPS um ca. 43 km/h ab. In der Realität wird dieser Fall aber nicht auftreten, denn bei so starken Signalschwankungen wird das Navigationsgerät melden, dass der Empfang zu schwach sei. Würde man eine längere Fahrstrecke (längere Fahrzeit) betrachten, so fällt der Fehler kaum ins Gewicht.

2D vs. 3D: Unklar ist, ob das Navigationsgerät die Geschwindigkeit auf Basis der dreidimensionalen Position oder auf der zweidimensionalen Position in der (angezeigten) Karte basierend berechnet. Der Unterschied lässt sich durch getrennte Betrachtung beider Situationen berechnen. Ergebnis: Fehler vernachlässigbar (ca. 0,55%). Bei diesem Beispiel bietet es sich an, auf (geometrische) Verhältnisse näher einzugehen.

Gas geben! Analysiert man die Anzeige des Navigationsgeräts beim Beschleunigen, so erhält man einen großen Fehler. Zusammengefasst ist also die Geschwindigkeitsanzeige in einem Navigationsgerät relativ genau, solange man die Geschwindigkeit nicht zu rasch ändert.

Literatur

Abb. 1 und 2: Erreichbare Genauigkeit bei GPS Positionsbestimmungen; <http://www.kowoma.de/gps/Genauigkeit.htm> (10.08.2006)

Weitere verwendete Quellen siehe Quellenverzeichnis in meiner Diplomarbeit „Wo bin ich? – Mathematische Mittel zur Positionsbestimmung (GPS) als Thema des Mathematikunterrichts“, angefertigt an der Johannes Kepler Universität in Linz (Österreich) im Mai 2007, betreut durch Jürgen Maaß, welche ich Ihnen gerne auf Anfrage zuschicke (Mail an ts_work@gmx.net). (Die Diplomarbeit beinhaltet auch mehr Beispiele und Informationen zu GPS sowie didaktische Gedanken.)

realistische Satellitenpositionen: z. B. <http://www.movingsatellites.com>