Andreas VOHNS, Universität Siegen

Fallbezogene Rekonstruktion grundlegender Ideen in der Geometrie

1. Motivation

In der Mathematikdidaktik wird seit langem über „fundamentale Ideen", „zentrale Ideen", „universelle Ideen" oder „Leitideen" nachgedacht. Gegenüber den hier zusammenfassend als „grundlegende Ideen" bezeichneten fachdidaktischen Konzeptionen sind die „Leitideen" in den deutschen Bildungsstandards ein deutlich reduziertes Konzept, bei dem eine Unterordnung möglichst aller erwarteten inhaltsbezogenen Kompetenzen unter möglichst jeweils genau eine Leitidee im Vordergrund steht. Dabei geht nach Ansicht des Vortragenden einiges an Potenzial verloren, das eine Orientierung an grundlegenden Ideen bieten könnte. Im Vortrag wird daher „bottum up" von einer konkreten Aufgabenstellung ausgehend das Reflexionspotenzial grundlegender Ideen rekonstruiert. Im Vordergrund steht dann die Frage, inwieweit das Zusammenspiel unterschiedlicher Ideen im Beispiel das Problem durchschaubar macht. Der Fokus liegt dabei nicht auf der Aufgabe selbst, sondern von Studierenden (N=28) generierten Lösungswegen zu der Aufgabe.

2. Fallbeispiel: Am Strand

Betrachtet wird dazu die Aufgabe „Am Strand" aus den Österreichischen Bildungsstandards (BMBWK 2005, S. 105):

> „Chris und Angela liegen am Strand. Chris hat 30 m bis zur Eisbar. Angela 40 m. Wie weit sind die beiden voneinander entfernt? Überlegt unterschiedliche Lagepositionen! Welche Positionen ermöglichen eine einfache rechnerische Lösung?"

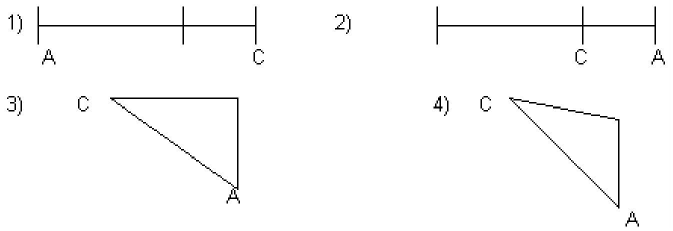
Die Analyse erfolgt nach einem dreischrittigen Verfahren: Sichtung der Lösungsansätze und Raffung zu idealtypischen Lösungsansätzen; Exploration möglicher Anknüpfungspunkte für grundlegende Ideen; Sachanalytische Ausweitung (Verhältnis der Ideen im Beispiel und darüber hinaus).

3. Lösungsansätze

A) Rechnerisch mit Pythagoras

Bei diesem Ansatz erfolgt zunächst die Feststellung, dass für die Berechnung eines Dreiecks drei Angaben (SWS, WWS, etc.) benötigt werden, die Aufgabe also nicht eindeutig sei. Man müsse die Aufgabe daher so verändern, dass bei der Eisbar ein rechter Winkel vorläge, dann könne man das Ergebnis mittels Pythagoras berechnen. Diese Lösung trat viermal auf.

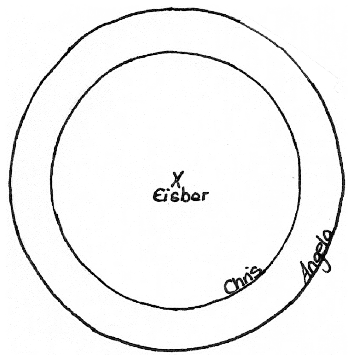
B) 2 Strecken 2 Dreiecke



Bei diesem Ansatz wird erkannt, dass die Bedingung verschiedene Optionen offen lässt.

Es werden i.d.R. vier Lagepositionen unterschieden, wobei die ersten beiden als „rechnerisch einfach" gelten, der dritte (rechtwinklige) Fall „erfordert Vorkenntnisse" und der 4. Fall müsse „unter Voraussetzung der gegebenen Bedingungen als nicht lösbar erkannt werden". Diese Lösung trat 19 mal auf.

C) 2 Kreise



Hier werden die Studierenden von der Frage geleitet, ob „die beiden möglichst dicht bei einander oder möglichst weit voneinander entfernt" liegen. Die Randlagen (Chris, Angela, Eisbar auf einer Geraden) werden als Extremalpositionen und die beiden Kreise als geometrischer Ort aller möglichen Positionen erkannt. Der Lösungsansatz tritt vier mal in Ergänzung zu B) auf, aber nur einmal als einziger Lösungsansatz.

D) Lösungsansätze mit DWIM-Verstößen

In zwei weiteren Sonderfällen verstoßen die Studierenden gegen in der Aufgabestellung implizit enthaltene Bedingungen („Do What I Mean"-Phänomen, Jahnke 2005). In einem Fall (E)) wird schlicht der Kosinussatz als generelle Antwort zur Berechnung der Entfernung aus einer Formelsammlung zitiert. In der zweiten Lösung (F)) ist das 2-Kreise-Modell in ein DGS umgesetzt worden und die Messung wird intern (d.h. empirisch-numerisch) vorgenommen. Das führt auch dazu, dass die beiden möglichen gleichschenkligen Dreiecks-Fälle aufgefunden werden. Berechnungsüberlegungen fehlen hier.

4. Analyse der Lösungsansätze

Die Lösungswege A) und B) verweisen auf einen rechnerisch-algebraischen Standpunkt. Von diesem Standpunkt aus sind nur einige ausgewählte Lagepositionen „einfach", nämlich diejenigen, bei denen sich die Entfernung von Chris und Angela berechnen lässt. Im „allgemeinen Fall" haben wir aber keine Berechnungsvorschrift. In dieser Lösung überwiegt die Idee des Messens: Die Berechnungsvorschriften sind gewissermaßen „geronnene" Messerfahrungen, wir wissen in diesen Fällen, wie wir das

Problem von der geometrischen Ebene auf eine numerische Ebene verlagern können (s. Abb).

(synthetisch) geometrischer Standpunkt

Alle Entfernungen zwischen 10 und 70 m lassen sich gleich einfach konstruieren.

Erfahrungen aus der Kongruenzgeometrie der unteren Mittelstufe (Kongruenzsatz SSS)

Lösungsvariante C)

Idee des Räumlichen Strukturierens

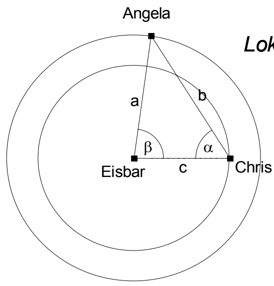
rechnerisch algebraischer Standpunkt

Die Spezialfälle β= 0;90;180 und α=90 können mit bekannten Formeln einfach bestimmt werden

Lokales Satzwissen zur berechnenden Geometrie (Satz von Pythagoras)

Lösungsvariante A), B)

Idee des Messens



Empirisch-numerischer Standpunkt

In einem DGS können alle Lagepositionen „nachgemessen werden“.

Lösungsvariante F)

trigonometrischer Standpunkt

Der Kosinussatz macht alle Situationen rechnerisch beherrschbar.

Lösungsvariante E)

(quasi-)funktionale Standpunkte

Idee der Funktion / funktionalen Variation

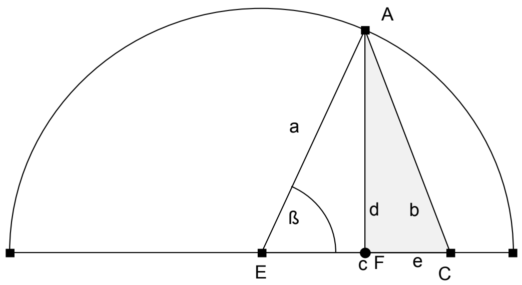
Die Lösung C) verbleibt auf einem (synthetisch) geometrischen Standpunkt. Hier sind alle Fälle gleich einfach, denn der Kongruenzsatz SSS garantiert die Konstruierbarkeit aller Entfernungen zwischen 10 und 70 m.

Die Lösung E) stellt die konsequente Fortsetzung der Lösungen A) und B) dar: Wenn man den Kosinussatz zur Verfügung hat, sind alle Fälle gleich einfach rechnerisch-algebraisch beherrschbar. Wir gewinnen dann zudem eine Formel, die uns in Abhängigkeit vom Winkel β stets die Entfernung von Chris und Angela berechnen lässt. Die Lösung F) greift den synthetisch-geometrischen Weg auf und liefert uns durch (empirische) Messung ebenfalls eine Möglichkeit, für jede mögliche Lageposition stets die Entfernung von Chris und Angela zu bestimmen. Insofern lassen sich beide Lösungsansätze unter einem (quasi-)funktionalen Standpunkt zusammenfassen.

5. Sachanalytische Ausweitung: Vom DGS zum Kosinussatz

Bei dieser Aufgabe zeigt sich eine Diskrepanz zwischen der Einfachheit aller Fälle unter kongruenzgeometrischer Perspektive und der rechnerisch-algebraischen Beherrschung ausschließlich in Spezialfällen. Diese Diskrepanz löst sich auf, wenn man das Problem trigonometrisch betrachtet: Der Kosinussatz ist das trigonometrische Pendant der Kongruenzsätze, mit dem sich wiederum alle Fälle berechnen lassen. Die Aufgabe könnte daher eine

Einführung des Kosinussatzes motivieren. Im Vortrag wurde nun der Frage nachgegangen, inwiefern die enthaltenen grundlegenden Ideen (räumliches Strukturieren, Messen, funktionale Variation) einen genetischen Zugang zum Kosinussatz ermöglichen. Dabei zeigt sich, dass ausgehend von der DGS-Lösung durch schrittweise Anwendung für die drei grundlegenden Ideen typischer Heurismen eine Planfigur (s. Abb.) aufgefunden werden kann, die eine Bestimmung der Entfernung mit bekannten Hilfsmittel (Definition von Sinus/ Kosinus am Einheitskreis, Satz von Pythagoras) erlaubt.



6. Resumé

Die Aufgabenstellung lenkt den Blick zunächst auf „berechenbare Situationen“. Dadurch entsteht eine Diskrepanz zwischen der „Einfachheit“ aller Fälle unter kongruenz-geometrischer Perspektive (*Räumliches Strukturieren*) und der Herausgehobenheit der Spezialfälle unter algebraisch-numerischer Perspektive (*Messen*). Diese Diskrepanz spiegelt sich in den Lösungsansätzen A) bis C) wieder. Eine Lösung mit DGS löst die Diskrepanz auf empirisch-numerischer Ebene auf und kann andererseits als Ausgangspunkt für eine Auflösung der Diskrepanz auf algebraisch-numerischer Ebene mittels Kosinussatz dienen.

Erst durch diese Zusammenführung wird nach Ansicht der Vortragende die typische Verknüpfung und Interaktion der Ideen (Messen, räumliches Strukturieren, funktionale Variation) deutlich, werden nur Einzelfälle berechnet, scheint kaum Anknüpfdungspotenzial für ein Reflektieren über grundlegende Ideen gegeben, welches für eine Orientierung an ebendiesen aber entscheidend wäre (Vgl. Vohns 2005).

Literatur

BMBWK 2005: Bildungsstandards für Mathematik am Ende der achten Schulstufe. Internet (http://www.gemeinsamlernen.at/siteVerwaltung/mOBibliothek/Bibliothek/Standards_Endversion_korr_25-10_eBook.pdf).

Jahnke, Thomas 2005: Aufgaben im Mathematikunterricht. Internet (http://www.math.uni-potsdam.de/prof/o_didaktik/a_mita/aa/Publ/mu).

Vohns, Andreas 2005: Messen oder (Be-)Rechnen? Mit fundamentalen Ideen über Mathematik reflektieren. In: Lengnink, Katja ; Siebel, Franziska (Hrsg.) : Mathematik präsentieren, reflektieren, beurteilen. Darmstadt, S. 69-84.