

Markus VOGEL, Ludwigsburg

Funktionale Abhängigkeiten in Daten erkunden - ein Beitrag der Mathematik zum naturwissenschaftlichen Arbeiten

Betrachtet man reale Daten als kontextualisierte Zahlen eines Phänomens, besteht ein wesentlicher Teil des Datenverstehens darin, eine den Daten zugrunde liegende Struktur (Trend) aufzudecken und in einem mathematischen Modell zu beschreiben. Dies ist ein wesentlicher Teil naturwissenschaftlichen Arbeitens: Daten systematischer Beobachtungen begründen ein Modell, dessen Parameter sich durch die Rückbindung an das Ausgangsphänomen erklären und spezifizieren lassen. Funktionen sind leistungsfähige Modellierungswerkzeuge der Mathematik, um Abhängigkeiten zwischen Variablen zu beschreiben. Die auftretenden Differenzen zwischen Funktionsmodell und Daten (Residuen) geben Aufschluss über die Modellgüte. Mit multimedialer Unterstützung werden gehaltvolle Zugangswege zur Datenmodellierung eröffnet. Dabei können sich naturwissenschaftliches Verstehen und funktionales Denken wechselseitig bereichern.

Curriculare Verankerung

Ein zentrales Merkmal der baden-württembergischen Bildungsplanreform von 1994 gegenüber den vorangegangenen Lehrplänen war das Merkmal des fächerverbindenden Unterrichts. Durch die Integration von Themen mit besonderer gesellschaftlicher und erzieherischer Relevanz sollten ganzheitliche Denk- und Sichtweisen geschult werden, welche die Schülerinnen und Schüler zur aktiven und reflektierten Teilhabe am sozialen gesellschaftlichen Geschehen befähigen sollten. Die nachfolgende Bildungsplanreform 2004 entwickelte den Ansatz der Fächerverbindung konsequent weiter bis hin zur Institutionalisierung von Fächerverbänden. Die Bildungsstandards des Fächerverbands *Naturwissenschaftliches Arbeiten (NWA)* formulieren u. a. Kompetenzen, wie z. B. „Daten erheben durch Messen, Beobachten, Beschreiben, Vergleichen [...] auswerten unter Verwendung von [...] Diagrammen, Tabellen, Gleichungen, Graphiken, Funktionen, [...] Begriffe oder Modelle bilden und Zusammenhänge formulieren“ (MKJS 2004, S. 97) können. Synoptisch betrachtet lassen sich solche Kompetenzen schlüssig mit den Leitideen des Faches Mathematik *Messen, Funktionaler Zusammenhang, Daten und Zufall* sowie *Modellieren* (s. MKJS 2004, S. 65f) in Beziehung setzen.

Modellieren naturwissenschaftlicher Phänomene

In der curricularen Schnittmenge lässt sich eine naturwissenschaftliche „Beziehungshaltigkeit“ (Freudenthal 1973, S. 75ff) des Faches Mathematik nachzeichnen, welche sich sowohl im Konzept der *Mathematical Literacy*

wieder findet, als auch in den Grundzügen einer mathematischen Allgemeinbildung nach Winter (1995, S. 38). Die naturwissenschaftliche Methodik ist eng verwoben mit dem Grundgedanken des mathematischen Modellierens (PISA-Konsortium Deutschland, 2004, S. 47ff). Naturwissenschaftliche Beobachtungen lassen sich über die experimentelle Erfassung in Daten einer systematischen Betrachtung zuführen. Betrachtet man naturwissenschaftliche Daten als kontextualisierte Zahlen eines Phänomens der natürlichen oder technischen Umwelt, besteht ein wesentlicher Teil des Modellierens darin, eine den Daten zugrunde liegende Struktur (Trend) aufzudecken und in einem mathematischen Modell zu beschreiben. Funktionen sind leistungsfähige Modellierungswerkzeuge der Mathematik, um Abhängigkeiten zwischen Variablen zu beschreiben. In den Naturwissenschaften finden häufig parametrische Funktionsstandardmodelle Verwendung. Im Kontext interpretiert erhalten die Funktionsparameter eine eigene Bedeutung, die zur Klärung des Ausgangsphänomens einerseits und zur Beurteilung der Mathematisierung andererseits beitragen kann.

Betrachtet man Daten in der Verschränkung einer deterministischen und einer stochastischen Komponente (Engel 1998, S. 99; Borovcnik 2005, S. 5), dann lässt sich für das Modellieren funktionaler Abhängigkeiten aus naturwissenschaftlichen Daten die Grundgleichung

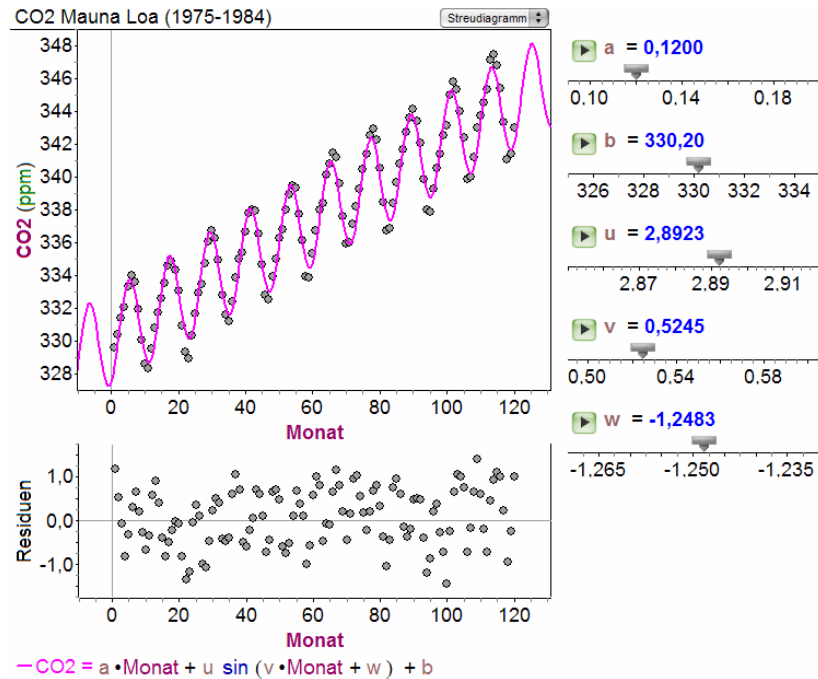
$$\text{Daten} = \text{Funktion} + \text{Residuen}$$

formulieren. Sie ist ein Konstrukt, das eine Interpretationshilfe darstellt, um in der Vielfalt und Variabilität der Daten wesentliche Strukturen zu erfassen. Die stochastische Komponente modelliert diejenige Variabilität in den Daten, die durch das deterministische Funktionsmodell nicht erfasst wird. Für den Mathematisierungsprozess hat dies zur Konsequenz, dass es nicht genügt, nur darauf zu achten, dass die funktionale Anpassung möglichst gut den Datentrend wiedergibt. Zugleich sollen die Abweichungen (Residuen) möglichst klein sein, möglichst zufällig im Sinne von trendfrei sein und sich nach oben und unten insgesamt ausgleichen (vgl. Biehler & Schweynoch 1999, S. 19f).

Multimediale Unterstützung

Die Grundgleichung $\text{Daten} = \text{Funktion} + \text{Residuen}$ lässt sich in einem Streudiagramm geeignet graphisch repräsentieren. Die Datenlage wird in einer Punktwolke dargestellt, während das Funktionsmodell in einem Graphen durch die Datenwolke führt. Den Residuen entsprechen die Abweichungen zwischen einzelnen Wertepaaren der Datenwolke und den Wertepaaren des Funktionsgraphen, die in der unabhängigen Variablen (Prädiktor) übereinstimmen. Durch die Mitberücksichtigung einer stochastischen Komponente wird die Modellierung stärker an die phänomenologische

Ausgangssituation angenähert, jedoch wird sie auch komplexer. Dynamische und interaktive Software, wie z. B. FATHOM bietet hier Möglichkeiten, den Modellierungsprozess sachgerecht und anwendernah zu unterstützen.



Neben vielen anderen Möglichkeiten der multimedialen Unterstützung ist ein zentrales Merkmal, dass mit der Zuschaltung eines Residuenplots neben dem Funktionsgraphen (deterministische Komponente) der stochastische Aspekt in das Blickfeld rückt. In der vorangehenden Abbildung ist dargestellt, wie ein Datenausschnitt der atmosphärischen CO₂-Messungen auf Mauna Loa durch die additive Kombination einer linearen Funktion und einer Sinusfunktion angepasst wurde. Der Funktionsgraph wird mit den Daten in einem Streudiagramm abgebildet, der zugehörige Residuenplot erscheint entsprechend unter dem Streudiagramm. Werden zur Datenanpassung parametrische Funktionsstandardmodelle verwendet, so werden über die dynamische Verknüpfung die Auswirkungen von interaktiven Parameteränderungen nicht nur hinsichtlich der funktionalen Anpassung, sondern auch der hinsichtlich der Datenabweichungen extern realisiert. Für eine Modellierung naturwissenschaftlicher Phänomene im Sinne der Grundgleichung $Daten = Funktion + Residuen$ ist dies tragend.

Didaktische Aspekte

Die Informationen von Trend und Residuen bilden die Grundlage für die Vergewisserung der funktionalen Modellkonstruktion einerseits. Andererseits werden die phänomenologischen Ausgangsinformationen durch die

Informationen struktureller Eigenschaften eines angepassten stochastisch-funktionalen Modells ergänzt. Die sukzessiv weitere Erschließung des phänomenologischen Hintergrunds liefert wiederum Informationen zur Beurteilung der funktional-stochastischen Modellierung. Finden parametrische Funktionsmodelle Verwendung, können zusätzlich inhaltliche Rückschlüsse über die verwendeten Parameter gezogen werden. So tragen Funktionen als mathematisches Werkzeug zur naturwissenschaftlichen Umwelter-schließung (Vollrath 1982, S. 2) bei: Naturwissenschaftliches Verstehen und funktionales Denken bereichern sich wechselseitig. Die Residuenana-lyse des gewählten mathematischen Modells gibt im Hinblick auf *Rest-Trend-Strukturen* inhaltlich darüber Auskunft, ob wesentliche Einflussfak-toren in die Modellierung eingegangen sind, welche (bewusst) vernachläs-sigt wurden, ob diese Entscheidungen den momentanen Anforderungen ge-nügen können oder ob Modellspezifikationen erforderlich werden. Werden naturwissenschaftliche Phänomene unter Berücksichtigung von Trend und Residuen modelliert, kann dies dazu beitragen, dass Realität und Modell nicht verwechselt werden.

Literatur

- Biehler, R. & Schweynoch, S. (1999). Trends und Abweichungen von Trends. *Mathe-matik lehren* (97), S. 17-22
- Borovcnik, M. (2005). Probabilistic and Statistical Thinking. Tagungsbeitrag zur CERME 4 – Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, 17. – 21.02.2005 in Sant Feliu de Guixols, Spanien. Abrufbar unter (19.03.2006): <http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius/5/Borovcnik.pdf>
- Engel, J. (1998). Zur stochastischen Modellierung funktionaler Abhängigkeiten: Kon-zepte, Postulate, Fundamentale Ideen. *Mathematische Semesterberichte*, 45, S. 95-112
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Stuttgart: Klett
- Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg (MKJS) (Hrsg.) (2004). *Bildungsplan für die Realschule*. Ditzingen: Philipp Reclam Jun.
- PISA-Konsortium Deutschland (Hrsg.) (2004). *PISA 2003. Der Bildungsstand der Ju-gendlichen in Deutschland – Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs*. Münster, New York, München, Berlin: Waxmann
- Vollrath, H.-J. (1982). Funktionsbetrachtungen als Ansatz zum Mathematisieren in der Algebra. *Der Mathematikunterricht*, 28 (3), S. 5-27
- Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Ge-sellschaft für Didaktik der Mathematik*, 61, S. 37-46