Ingrida Veilande, Seefahrt Akademie Lettlands

Die Methode des Mittelwertes für die kombinatorisch - geometrische Aufgaben.

Einführung. Im Laufe von mehreren Jahren werden in Lettland die Traditionen der mathematischen außerschulischen Ausbildung gepflegt. Dank dem Enthusiasmus der Mathematiklehrer und der Wissentschaftler Lettlands ist aktive Teilname der Schüler sowohl an mathematischen Arbeitgemeinschaften, Fernschulen und Sommerkursen, als auch an verschiedenen Olympiaden für Mathematik zu verzeichen.

Damit die Schüler in den Olympiaden gute Erfolge erzielen könnten, haben sie viele nicht dem Standart entsprechende Aufgaben zu lösen. Dabei ist die Unterstützung und Hilfe eines erfahrenen Lehrers von größter Bedeutung. Die Lehrer müssen sich viel Mühe geben, um Lösungen der gewählten Aufgaben anschaulich darzustellen, sie müssen den Schülern neue Lösungsmethoden beibringen. Es ist wichtig fesselnde Beispiele zu wählen, zu denen ohne Zweifel kombinatorisch geometrische Aufgaben zählen.

Kombinatorisch - geometrische Aufgaben [KGA]. In den KGA werden die Systemeigenschaften der geometrischen Objekte untersucht. Es scheint zweckdienlich zu sein, solche Aufgaben vom Standpunkt der Art und Weise der in ihnen enthaltenen Objekte zu klassifizieren [1]. Zum Beispiel:

- ✓Aufgaben über die Punktesysteme der Ebene.
- ✓Aufgaben über die Systeme der Geraden, der Strecken und der Vektoren.
- ✓Aufgaben über den Zerlegung in die Teile einiger Figuren, Vereinigung oder Bedeckung mehrerer Figuren.
- ✓Aufgaben über das Färben.

Ungeachtet dessen, dass die Schüler solche Aufgaben als relativ einfache Aufgaben fassen, sollte man bei deren Lösung verschiedene Methoden anwenden und allgemeine geometrische Gesetzmäßigkeiten auf die Resultate der Kombinatorik, der Zahlen - oder der Graphentheorie zurückführen. Für den Beweise muß man sich auch in solchen allgemeinen Urteilsmethoden gut auskennen, wie z.B. in der mathematischen Induktion, in der Methode des Extremelements, in der Methode der Invarianten oder in der Methode des Mittelwertes. Die Aneignung der oben erwähnten Methoden würde den Schülern die Möglichkeit geben, die Aufgaben rationell zu lösen und ihr Wissensniveau zu fördern.

Die Methode des Mittelwertes [MWM]. Bei der Analyse der KGA fällt auf, dass es unter denen solche gibt, die man mittels der Methode des

Mittelwertes lösen kann [2]. Die letztere läßt sich ganz allgemein wie folgt formulieren:

Teilt man das gegebene Objekt in eine „kleinere“ Zahl der Bestandteile ein, dann wird mindestens ein Teil „genügend“ groß sein.

Einer der bekanntesten Spezialfälle der MWM ist das Dirichletprinzip **[DP].** Mithin lassen sich geometrische Verallgemeinerungen als Lehrsätze über den Deckung von Strecken oder Flächen formulieren. Wenn man beim Lösen einer Aufgabe irgendein Element mäßig abschätzen muß, so ergeben sich folgedessen qualitative Schlußfolgerungen, falls man die erwähnte Größe z.B. mit dem arithmetisches Mittel vergleicht. Die sogenannten Ramsayaufgaben (die Ergebnisse der Ramsaytheorie) bilden in den Olympiaden eine zahlenmäßig ziemlich große Aufgabenklasse.

Übungsbeispiele für die Lösungsverfahren der KGA. Betrachten wir einige Aufgaben und versuchen wir, deren Lösungsidee anschaulich darzustellen. Die gewählten Beispiele sind ihrem Wesen nach die Beweisaufgaben. Eines der Grundprinzipien bei deren Lösung ist der apagogische Beweis. Die Anwendung der MWM ist eines der wichtigsten Argumente, das Gegenteil zu erhalten.

In der Aufgabe über Punktesysteme werden die eventuellen Entfernungen zwischen den gegebenen Punkten analysiert; es wird eventuell größte oder kleinste Punktezahl festgestellt, die die Aufgabenbindungen erfüllt. Es wird ebenfalls die Anordnung der eventuellen Punkte untersucht. Gleichzeitig werden Versuche gemacht, auch andere Probleme zu lösen.

1. Aufgabe. [3] Die Länge der Seite eines Quadrats betrage 10 Einheiten; in dessen Innern seien 102 Punkte in allgemeiner Position gegeben. Man beweise, dass sich unter denen (102 Punkten) 3 Punkte finden lassen, mit deren Hilfe ein Dreieck konstruiert wird, dessen Fläche nicht größer als 1 ist.

Die Lösungsidee ist auf den arithmetischen Mittelwert zurückzuführen. Betrachten wir die konvexe Schale eines Punktesystems, die sich laut dem Gegebenen vollständig im Innern des Quadrats befindet; deshalb ist die Fläche dieses Polygons beachtlich kleiner als 100 Quadrateinheiten. Zerschneiden wir die konvexe Schale in solche Dreiecke, deren Scheitelpunkte die gegebene Punkte sind. Es läßt sich nachweisen, dass die kleinste Zahl der Dreiecke je nach der Anordnung des Punktesystems gleich 100 ist. Dann läßt sich mittels des arithmetischen Mittelwerts mindestens 1 Dreieck finden, dessen Fläche kleiner als 1 ist.

Man kann bedeutend mehr Resultate der Zahlentheorie anwenden, wenn man die definierten Punktesysteme im orthogonalen Gitter betrachtet. Fügt man in solch ein Gitter orthogonales Koordinatensystem ein, dann sind die Punkte der Koordinaten ganze Zahlen. Eine der einfachsten Anwendungsmöglichkeiten des Dirichletprinzips in den KG Aufgaben ist die Abschätzung der geraden und ungeraden Eigenschaften der Zahlen. Die Aufgaben dieser Art sind für die Schüler der unteren Klassen besonders geeignet, wenn man sie mit den Grundlagen der Zahlentheorie vertraut macht.

2. Aufgabe. Im kubischen Gitter werden 9 Punkte gewählt. Man beweise, dass mindestens eine der Strecken, die diese Punkte miteinander verbindet, durch einen Punkt des Gitters geht.

Beweisidee. Hier hat jeder Punkt 3 Koordinaten. Die eventuelle Zahl der Kombinationen, die in den Paritäten der Zahlenkoordinaten möglich ist, ist 8. Laut DP decken sich die Koordinaten von mindestens zwei Zahlen nach der Parität, deshalb sind die Mittelpunktkoordinaten dieser Strecke ganze Zahlen.

Aufgaben über die Systeme der Geraden und Strecken. In solchen Aufgaben wird die mögliche Zahl der Schnittpunkte, die minimale oder maximale Zahl der Teile der Ebenen oder Figuren abgeschätzt, die sich beim Überschneiden von Geraden oder Strecken konstruieren lassen. Eines der characteristischen Verfahren bei der Lösung von solchen Aufgaben ist die Projizierung der Strecken - oder Figurenmengen auf eine oder mehrere Geraden; dies macht möglich, die Projektionen mittels des Lehrsatzes über Streckenkongruenz abzuschätzen und Schlußfolgerungen über die Anordnung der Strecken und Figuren zu ziehen.

3. Aufgabe. Im Kreis mit dem Halbmesser n sind die Strecken untergebracht, deren Länge 1 ist und deren Anzahl $4n$ beträgt. Man beweise, dass eine parallele oder senkrechte Gerade in Bezug auf die gegebene Gerade so gezogen werden kann, dass die letztere mindestens zwei der gegebenen Strecken schneidet.

Lösungsidee. Hier werden die Projektionen aller Strecken auf zwei gegenseitig senkrechte Geraden betrachtet. Auf einer dieser Strecken wird laut dem Prinzip des Mittelwertes die Summe der Projektionen aller Strecken nicht kleiner sein als auf der anderen. Abhängig von den Eigenschaften dieser Projektionen wird diese Summe größer als $2n$ sein können. Anderseits ist die gemeinsame Strecke der Projektionen nicht die Länge $2n$ des Durchmessers, daher decken sich laut dem DP über die Streckenkongruenz mindestens zwei Strecken lassen sich von einer Geraden schneiden.

In die Aufgaben über die Anordnung und Überdeckung von Figuren werden die Fragen über die Eigenschaften einer ganz bestimmten Art der Figurenanordnung untersucht.

4. Aufgabe. Im Quadrat mit der Fläche S sind 1975 Figuren untergebracht, deren Flächensumme größer als $1974S$ ist. Man beweise, dass diese Figuren einen gemeinsamen Punkt haben.

Die Lösung stützt sich auf das Komplementverfahren der Figurenfläche. Betrachten wir jede Figur und deren Komplement bis zur totalen Größe des gegebenen Quadrats. Wenn man die Flächen aller Figuren mit allen Figurenergänzungen addiert, erhält man als Betrag $1975S$. Anderseits kann man die Summe aller Komplementen extra abschätzen infolgedessen zum Schluß kommen, dass deren Gesamtfläche kleiner als die gegebene Fläche S ist. Das bedeutet, dass es mindestens einen Punkt gibt, der zu keiner Figurenergänzung gehört. Deshalb gehört so ein Punkt gleichzeitig allen Figuren an.

Die Färbungs Aufgaben sind KGA über die Färbung von Punkten, Strecken, Figuren oder deren Teilen, über die Färbung der Oberfläche von Polyedern.

5. Aufgabe. [4] Auf der Geraden sind n Punkte A_1, A_2, A_3, ... A_n gegeben, wobei $A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{n-1}A_n$ ist, die mit zwei verschiedenen Farben gefärbt sind. Man finde die kleinste natürliche Zahl n ($n>2$), im Fall, dass bei der Färbung von allen Punkte in zwei Farben sich 3 solche Punkte A_i, A_j, A_{2j-i} ($1 \le i < 2j - i \le n$) festlegen lassen, die gleich gefärbt sind.

Auslegung. Betrachten wir die Indizes der 3 gegebenen Punkte und bemerken wir, dass sie die arithmetische Reihe bilden. Diese Aufgabe ist einer der einfachsten Fälle des van der Wardensatzes (ein Spezialfall des MWM), in dem die sogenannte van der Wardenzahl $W(3, 2)=9$ betrachtet wird.

Anmerkung. Die KG Aufgaben sind zu einem festen Bestandteil in verschiedenen Mathematikwettbewerben geworden; deshalb ist es so wichtig, sie im außerschulischen Unterricht zu lösen. Solche Aufgaben sind für die Schüler verschiedenen Alters geeignet: die Schüler der unteren Klassen können mit den gegebenen Größen experimentieren und klassifizieren. Die Schüler der oberen Klassen Könnten sich verschiedene Lösungsverfahren aneignen.

Literatur.

1. A.Andzans, L.Ramana, G.Shulce. Uzdevumu krajums kombinatoriskaja geometrija. 1998. http://www.liis.lv
2. A.Andzans, L.Ramana, J.Chakste, T.Larfelds, M.Seile. Videjas vertibas metode. 2000. http://www.liis.lv
3. A.Andzans, M.Seile, Z.Zvirbule. Profesora ciparina kluba uzdevumi un atrisinajumi. Zvaigzne ABC, 2000.
4. Bulgarian National Mathematical Olympiad, 1998. http://www.math.bas.bg/bcmi/