

Horst STEIBL, Braunschweig

Kombinatorische Aspekte auf dem 9-Nagel-Geobrett

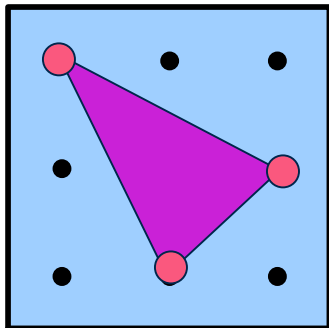
Beim Arbeiten mit dem Geobrett tauchen oft Fragen auf, die mit „Wie viele...“ beginnen. Solche Fragen ermöglichen ein eigenständiges forschendes Verhalten. Wie viele Dreiecke gibt es? Wie viele Vierecke, Strecken, Längen, verschiedene Winkel?

Ein derartiges Suchen kann als „blindes“ Suchen oder als systematisches Suchen erfolgen. Wir finden etwa auf dem 9-Nagel-Brett 8 Klassen kongruenter Dreiecke, 16 Klassen kongruenter Vierecke, 5 Klassen gleich langer Strecken (d.h. 5 Längen), 10 Klassen gleich großer Dreieckswinkel. Ich möchte das blinde Suchen nicht zu gering bewerten. Der Begriff „die denkende Hand“ macht deutlich, welche wichtigen Prozesse dabei im Gehirn ablaufen können. Dennoch sollte man die Schüler zum systematische Suchen hinführen. Wir halten eine Strecke fest und suchen alle Winkel.....

Mitunter kommen allerdings (wenn auch selten) Einwände und die Schüler wollen sich nicht mit dem bloßen Probieren begnügen. Hier ist das Einbeziehen kombinatorische Fragestellungen angezeigt.

Die Frage „Wie viele Dreiecke gibt es“ kann auch anders formuliert werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es unter den 9 Nägeln 3 auszuwählen. Damit sind wir bei dem Binomialkoeffizienten $\binom{9}{3}$ Wie sprechen „9 über 3“ . die Formulierung „3 unter 9“ entspricht dem deutschen Sprachgebrauch besser.

Zu Einführung dieser Denkweise bieten wir ein Spiel an: Wir ordnen dem Tastentelefon entsprechend den 9 Nägeln die Ziffern 1 bis 9 zu. Wir



beschriften 9 Spielsteine mit den Ziffern 1 bis 9. Legen sie in einen Beutel und ziehen *nacheinander* 3 Steine (oder später 2, oder 4, 5). Ziehen wir etwa die 6, die 1 und die 8, so ist damit dieses (7, 11, 11)-Dreieck bestimmt. Nicht jedes derartige Tripel bestimmt allerdings ein Dreieck. Das Tripel (1, 5, 9) beschreibt eine Diagonale, (1,2,3) beschreibt eine 10er-Strecke usw.

Abbildung 1: Das Tripel 1 6 8 bestimmt dieses (7,11,11)-Dreieck

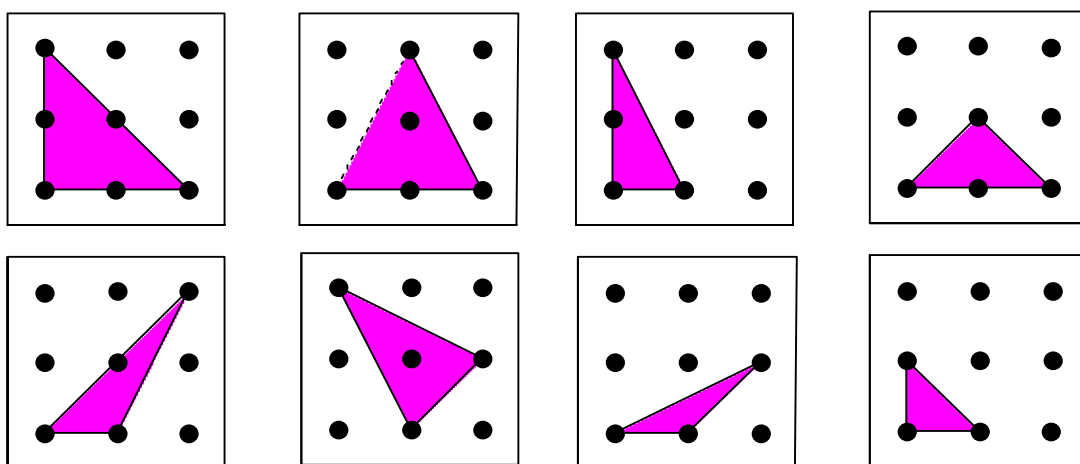
Zum Spiel benötigen wir für jeden Spieler ein Geobrett und 5 Würfelchen als Spielgeld. Neun mit den Ziffern 1 bis 9 beschriftete Spielsteine liegen in einem Beutel.

Spielregel: Einsatz: ein Würfelchen. Jeder Spieler zieht (nacheinander) 3 der beschrifteten Spielsteine und spannt sein Dreieck. Gewonnen hat der, dessen Dreieck den **größeren Flächeninhalt** hat. Bei gleichem Inhalt gewinnt der **kleinere Umfang**. Die 10-Strecke ist eine Niete, die 14-Strecke ein Hauptgewinn.

Man kann die Spieldauer mit einer Strichliste dokumentieren. Nach wie vielen Durchgängen hat ein Spielen kein Spielgeld mehr? Kann man eine solche Vorhersage treffen: Nach etwa

Haben die Schüler ausreichend Erfahrung mit dem „Urnenmodell“ gesammelt, so wollen wir dieses analysieren. Wie viele Drillinge (Tripel) von Ziffern sind eigentlich möglich? Für die erste Ziffer gibt es 9 Möglichkeiten, für die 2. noch 8 und für die 3. noch 7. Also $9 + 8 + 7$ Möglichkeiten. Ja aber: das Dreiecke 168 wird auch durch die Tripel 186, 618, 681, 816, und 861 beschrieben. Also gibt es $\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$

Möglichkeiten, 3 verschiedenen Spielsteine zu ziehen Wie kann man von hier aus auf die Anzahl der Klassen kongruenter Dreiecke schließen? Nun kommen die verschiedenen Lagemöglichkeiten der Figuren ins Spiel. Die 10-er Strecke hat 6 Lagemöglichkeiten, die 14-er Strecke hat 2 Lagemöglichkeiten. Für die Dreiecke sieht das so aus:



$$4 + 4 + 16 + 8 + 8 + 4 + 16 + 16 = 76$$

Abbildung 2: Die Anzahl der Lagemöglichkeiten der Dreiecke

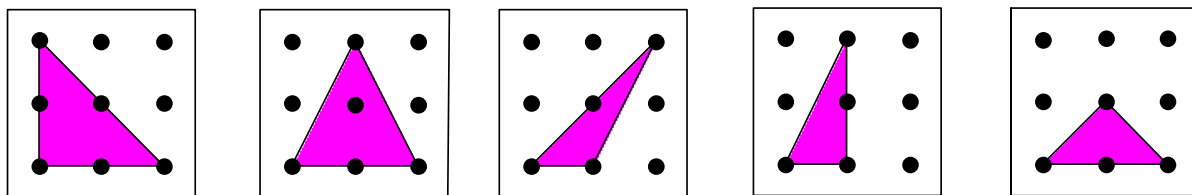
Damit erhalten wir also 8 Strecken und 76 Dreiecke, also 84 Figuren, die durch 3 Nägel bestimmt sind. Es kann also nicht mehr geben.

Die Anzahl der möglichen Strecke ergibt sich als $\binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} = 36$ und macht

das Prinzip der Bildung eines Binomialkoeffizienten noch einmal deutlich. Für die Vierecke sind die Überlegungen etwas komplizierter:

Wie finden wir die $\binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$ Figuren aus 4 Nägeln? Es gibt zwar

keine kollineare Anordnung, aber 3 Nägel können kollinear liegen.



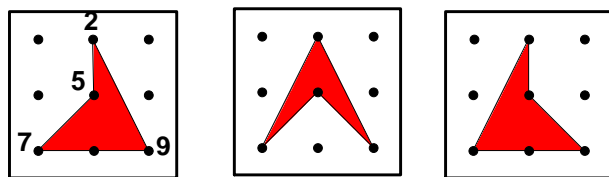
$$4 + 4 + 8 + 16 + 8$$

Abbildung 3: Die Lagemöglichkeiten der durch vier Nägel bestimmten Dreiecke

Damit ergeben sich $4 + 4 + 8 + 16 + 8 = 40$ Lagemöglichkeiten. Das sind aber leider nicht die Möglichkeiten der entsprechenden Quadrupel. Das erste (10, 10, 14)-Dreieck hat drei Strecken mit 3 Nägeln. Deshalb sind das nicht 4, sondern $3 \cdot 4 = 12$ Fälle, also insgesamt 48 Fälle.

Betrachten wir entsprechend die Lagemöglichkeiten der Vierecke, so ergeben sich 94 Fälle, insgesamt erhalten wir also $48 \cdot 94 = 142$ Fälle und damit 16 zu viel.

Der Fehler entsteht bei dem Spannen der Vierecke mit einspringender Ecke. Die Fehlersuche ist



allerdings lehrreich. Das Quadrupel 2579 bestimmt drei verschiedene Figuren.

Abbildung 4: Das Quadrupel 2579 bestimmt drei Figuren

Somit stellen wir fest: es gibt zwei Fehlermöglichkeiten:

Nicht jedes Quadrupel bestimmt eindeutig eine Figur.

Nicht jede Figur wird eindeutig durch ein Quadrupel beschrieben.

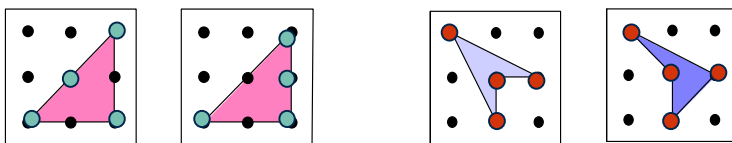


Abbildung 5: die beiden Fehlermöglichkeiten

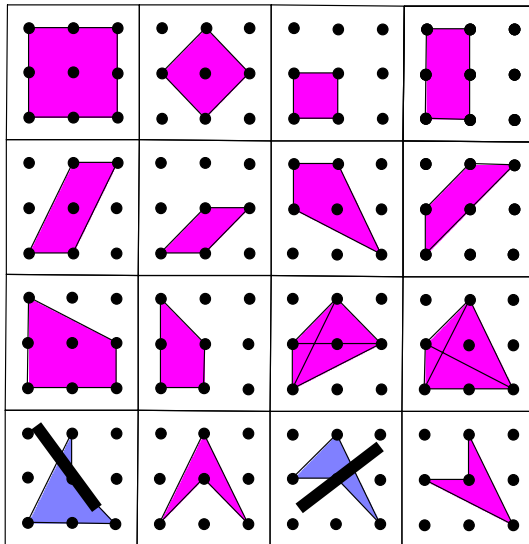
Betrachten wir die Lagemöglichkeiten der Vierecke mit dieser Einschränkung, so erhalten wir

$$1 + 1 + 4 + 4$$

$$4 + 8 + 4 + 4$$

$$8 + 16 + 8 + 8$$

$$4 + 4$$



Insgesamt also 78 Fälle. $78 + 48 = 126$. Also können wir sicher sein, alle Vierecke gefunden zu haben.

Man kann diese Fragestellung auf 5 Nägel ausweiten. Dabei kommen die nicht konvexen Figuren verstärkt ins Spiel, Deutet man diese als Vierecke mit einem Nagel im Inneren, so kommt man gut zurecht. Bei einer solchen Figur kann man jede der vier Seiten nach innen über den Nagel im Inneren ziehen.

Abbildung 6: Anzahl der Lagemöglichkeiten die Vierecke

Ob man diese Fragestellungen in diese Ausführlichkeit behandeln sollte, kann man durchaus in Frage stellen.

Das folgende Spiel macht aber den wahrscheinlichkeitstheoretischen Aspekt des Problems deutlich:

Spiel mit vier Nägeln (Flächeninhalt)

Zwei Spieler, jeweils 10 Spielsteine als Einsatz. Gesetzt werden jeweils 2 Steine. Der erste Spieler zieht seine vier Ziffern. Der zweite kann nun entscheiden, ob er noch ziehen will oder ob er zurückzieht. Spielt er, so hat der mit dem größeren Flächeninhalt (evtl. kleinerem Umfang) gewonnen und bekommt vier Spielsteine. Zieht er zurück, so bekommt er einen Stein zurück der andere bekommt 3 Steine. Wann sollte man zurückziehen?

Literatur:

Steibl, Horst: Geobrett im Unterricht, 2006 by Franzbecker, Hildesheim, Berlin

Steibl, Horst: Kombinatorische und wahrscheinlichkeitstheoretische Aspekte am Geobrett, in Beiträge zum Mathematikunterricht 1977, Hannover 1977

Steibl, Horst: Exemplarische Entwicklung der kombinatorischen Grundformeln, in: Der Mathematikunterricht, Jahrgang 30 Heft 1/1984

<http://madin.tu-bs.de/homepage/steibl/pptankuendigungen/kombigeobrett.ppt>