

Johann SJUTS, Osnabrück/Leer; Binyan XU, Shanghai

Befunde aus empirischen Studien zum mathematischen Denken unter besonderer Berücksichtigung von Metakognition

Der nachstehende Beitrag enthält einige Resultate von Studien zum mathematischen Denken in China und Deutschland. Die im chinesisch-deutschen Vergleich zum Teil erheblichen Unterschiede geben zu Fragen Anlass: Welche Kompetenzen lassen sich ausfindig machen, die einerseits Lösungshäufigkeiten zu erklären vermögen, die andererseits in Unterrichtsprozessen gefördert werden können, um die Bearbeitungserfolge zu vergrößern? Welche Bedeutung hat dabei Metakognition?

Die Untersuchungen fanden zu Beginn des Schuljahres 2004/2005 und zu Beginn des Schuljahres 2005/2006 statt, die erste an einem Gymnasium in Leer (Deutschland), die zweite an allen drei Gymnasien des Landkreises Leer sowie an zwei Grundschulen in Shanghai (China). Beteiligt waren 2004 in Leer 458 Schülerinnen und Schüler der Schuljahrgänge 5 bis 7, 2005 im Landkreis Leer 460 Schülerinnen und Schüler des Schuljahrgangs 5 sowie in Shanghai 397 Schülerinnen und Schüler des Schuljahrgangs 5.

Konnte man im ersten Fall (2004) Alters- und Schuljahrgangsentwicklungen betrachten, waren es im zweiten Fall (2005) Leistungsvergleiche zwischen Deutschland und China. Zum Einsatz kamen 2004 und 2005 gleiche Testaufgaben. Aufgaben, Ergebnisse und Analysen zur Studie 2004 finden sich in Sjuts 2005a, b, c.

Die Testpersonen von 2004 waren zehneinhalb bis zwölfteinhalb Jahre alt. Sie besuchten zum Zeitpunkt der Studie zwar alle die gleiche Schule, hatten aber erst wenige Tage zuvor den Besuch dieser Schule aufgenommen. Das lag an der besonderen Situation zu diesem Zeitpunkt. Das Bundesland Niedersachsen hatte nämlich die dortige eigenständige Orientierungsstufe (bestehend aus den Schuljahrgängen 5 und 6) abgeschafft. Und somit kamen aus dem Schuljahrgang 4 zahlreicher Grundschulen sowie aus den Schuljahrgängen 5 und 6 mehrerer gerade aufgelöster Orientierungsstufen gleichzeitig drei neue Schuljahrgänge (5, 6 und 7) an das Gymnasium.

Die Testpersonen von 2005 waren zehneinhalb Jahre alt. Die deutschen Schülerinnen und Schüler entstammten wiederum zahlreichen Grundschulen und waren in den Schuljahrgang 5 der drei Gymnasien gewechselt. Die chinesischen Schülerinnen und Schüler besuchten alle noch den Schuljahrgang 5 der insgesamt fünfjährigen Grundschule.

I. Die Testaufgabe „Zahlenfolgen“ soll einem ersten chinesisch-deutschen Vergleich dienen.

Zahlenfolgen

Setze die Zahlenfolgen jeweils fort!

2	5	8	11	14
1	3	7	15	31
0	5	15	30	50

Dazu sei das Gesamtergebnis der Aufgabe betrachtet.

	Shanghai 2005 Jahrgang 5 (397)	Leer 2005 Jahrgang 5 (460)	Leer 2004 Jahrgang 5 (145)	Leer 2004 Jahrgang 6 (174)	Leer 2004 Jahrgang 7 (139)
Zahlenfolgen	78,5 %	58,1 %	54,7 %	64,1 %	75,3 %

Die Ergebnisse, die chinesische Grundschülerinnen und -schüler zu Beginn des Schuljahrgangs 5 erzielen, erreichen deutsche Gymnasialschülerinnen und -schüler allenfalls zu Beginn des Schuljahrgangs 7. Die bei der Bewältigung von Aufgaben zum mathematischen Denken von eher geringer Komplexität in China zu verzeichnende Erfolgsquote wird in Deutschland erst zwei Jahre später – und zwar im Gymnasium – erreicht. Welche Erklärungen könnte es dafür geben? Curriculare Gründe, also das Nichtvorhandensein arithmetischer Kenntnisse und Fertigkeiten sowie die Nichtvertrautheit mit derartigen Aufgaben, scheiden aus (Xu 2005).

	Shanghai 2005 Jahrgang 5 (397)	Leer 2005 Jahrgang 5 (460)	Leer 2004 Jahrgang 5 (145)	Leer 2004 Jahrgang 6 (174)	Leer 2004 Jahrgang 7 (139)
Erste Folge	92,4 %	96,1 %	92,4 %	94,8 %	97,8 %
Zweite Folge	67,8 %	26,3 %	22,8 %	39,7 %	50,4 %
Dritte Folge	75,3 %	52,0 %	49,0 %	58,0 %	77,7 %

Bei der einfachsten Folge (der ersten Folge) gelangen die deutschen (gymnasialen) Testpersonen zu besseren Ergebnissen als die chinesischen Testpersonen aus der Grundschule. Bei der in der Schwierigkeit dann folgenden Folge (der dritten Folge) sind erst deutsche Gymnasialschülerinnen und -schüler – und die eben zwei Jahre später – den chinesischen Grundschülerinnen und -schülern ebenbürtig. Bei der schwierigsten Folge (der zweiten Folge) holen die deutschen gymnasialen Testpersonen – selbst nach zwei Jahren – den in China bereits in der Grundschule erworbenen Vorsprung nicht auf.

Erklärungen wird man bei kognitiven und metakognitiven Prozessen (Sjuts 2003) suchen müssen. Die kognitiven Anforderungen sind bei der ersten und der dritten Folge eher gering; hier müssten also hauptsächlich metakognitive Aktivitäten von Bedeutung sein. Die kognitiven Anfor-

derungen bei der zweiten Folge sind sicher höher; das Bildungsgesetz der Folge ist komplizierter. Hat man jedoch das Bildungsgesetz herausgefunden, bleibt als Anforderung, beim Ausrechnen der weiteren Folgenglieder das Bildungsgesetz nicht aus den Augen zu verlieren. Wichtig ist es also, genau zu überwachen und zu prüfen, ob die Berechnungen sowohl dem jeweiligen Folgenprinzip genügen als auch arithmetisch richtig sind.

These 1: Am Ende der Grundschulzeit setzen (deutsche) Schülerinnen und Schüler in nur geringem Maße Metakognition ein, um so ihr mathematisches Denken bei Anforderungen von eher geringer Komplexität zu kontrollieren. *Steuerung, Überwachung und Überprüfung kognitiver Prozesse* nehmen zwar mit Alter und Schuljahrgang zu, könnten und müssten aber durch gezielte Unterrichtsmaßnahmen früher und nachhaltiger geschult werden. So ließen sich deutliche Leistungsverbesserungen im mathematischen Denken bei Anforderungen von eher geringer Komplexität erreichen.

II. Es sollen nun komplexere Anforderungen ins Blickfeld rücken. Die Testaufgabe „Wanne“ enthält solche, und zwar mit dreistufigen Komplexitätsvarianten. Diese Varianten sind durch steigende kognitive Komplexität gekennzeichnet (kurz: KK 1, KK 2 und KK 3).

Wanne (KK 1)

Man braucht drei Minuten, um eine Wanne zu füllen, und sechs Minuten, um sie zu leeren.

Wie lange dauert es, die Wanne zu füllen, wenn der Stöpsel herausgezogen ist?

Wanne (KK 2)

Man braucht zwei Minuten, um eine Wanne zu füllen, und drei Minuten, um sie zu leeren.

Wie lange dauert es, die Wanne zu füllen, wenn der Stöpsel herausgezogen ist?

Wanne (KK 3)

Man braucht drei Minuten, um eine Wanne zu füllen, und fünf Minuten, um sie zu leeren.

Wie lange dauert es, die Wanne zu füllen, wenn der Stöpsel herausgezogen ist?

Es ist offensichtlich, dass diese Aufgabe ein anspruchsvolleres Denken verlangt als die Aufgabe „Zahlenfolgen“. Wie sieht nun der chinesisch-deutsche Vergleich aus? Zu erwähnen ist, dass die Testpersonen nach einem Zufallsprinzip sich nur mit einer Komplexitätsvariante zu beschäftigen hatten. So sollte ein allmähliches Vertrautwerden und Hocharbeiten ausgeschlossen werden. Die folgende Tabelle enthält zum besseren Verständnis auch die absoluten Zahlen.

	Shanghai 2005 Jahrgang 5 (397 Testpersonen)	Leer 2005 Jahrgang 5 (460 Testpersonen)	Leer 2004 Jahrgänge 5 bis 7 (458 Testpersonen)
Wanne KK 1	55 von 138 (39,9 %)	28 von 153 (18,3 %)	43 von 155 (27,7 %)
Wanne KK 2	36 von 124 (29,0 %)	14 von 151 (9,3 %)	24 von 153 (15,7 %)
Wanne KK 3	22 von 135 (15,8 %)	0 von 156 (0,0 %)	2 von 150 (1,3 %)

Gibt es auch hier Verbesserungen mit steigendem Alter und Jahrgang?

	Shanghai 2005 Jahrgang 5 (397)	Leer 2005 Jahrgang 5 (460)	Leer 2004 Jahrgang 5 (145)	Leer 2004 Jahrgang 6 (174)	Leer 2004 Jahrgang 7 (139)
Wanne	28,5 %	9,1 %	13,1 %	13,8 %	18,7 %

Zwar gibt es Steigerungen von Jahr zu Jahr; aber in keinem Fall kommen die deutschen Testpersonen aus dem Gymnasium an die chinesischen Testpersonen aus der Grundschule heran.

These 2: Am Ende der Grundschulzeit verfügen (deutsche) Schülerinnen und Schüler in nur geringem Maße über Metakognition, um so ihr mathematisches Denken bei Anforderungen von eher hoher Komplexität zu unterstützen. *Organisation, Reorganisation und Reflexion kognitiver Prozesse*, die zur Bewältigung anspruchsvoller Aufgaben beitragen, stellen sich nicht von selbst ein. Sie könnten und müssten aber durch gezielte Unterrichtsmaßnahmen früher und nachhaltiger geschult werden. So ließen sich deutliche Leistungsverbesserungen im mathematischen Denken bei Anforderungen von eher hoher Komplexität erreichen.

Literatur:

Sjuts, Johann (2003): Metakognition per didaktisch-sozialem Vertrag. In: Journal für Mathematik-Didaktik, Jahrgang 24, Heft 1, S. 18-40, 2003

Sjuts, Johann (2005a): Denken will organisiert sein. Empirische Studien zur Komplexität mathematischen Denkens. In: Kaune, Christa & Schwank, Inge & Sjuts, Johann (Hrsg.): Mathematikdidaktik im Wissenschaftsgefüge: Zum Verstehen und Unterrichten mathematischen Denkens. Festschrift für Elmar Cohors-Fresenborg. Band 2. 2005

Sjuts, Johann (2005b): Empirische Studien zur Komplexität mathematischen Denkens. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2005

Sjuts, Johann (2005c): Thinking wants to be Organized. Empirical Studies to the Complexity of Mathematical Thinking. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Volume 37 (5), 2005, pp. 424-430

Xu, Binyan (2005): Die mathematische Curriculumreform in China und ihre Auswirkungen auf die didaktische Konzeption von Schulbüchern. In: Kaune, Christa & Schwank, Inge & Sjuts, Johann (Hrsg.): Mathematikdidaktik im Wissenschaftsgefüge: Zum Verstehen und Unterrichten mathematischen Denkens. Festschrift für Elmar Cohors-Fresenborg. Band 2. 2005