

Helmuth Schöne Köln

Über den Term $(P - x^2) / x$

Der Satz von John Wilson $(P - 1)! + 1 \equiv 0 \pmod{P}$ ist die einzige Möglichkeit (die bisher bekannt ist), unter den ungeraden Zahlen P , die „auszusieben“, die prim sind. Leider ist dieser Satz unpraktikabel. Denn schon für die Zahl 101 ist ein Test mit dem Wilsonschen Satz mit großem Rechenaufwand verbunden.

Der Term $(P - x^2) / x$ ermöglichte die Entwicklung eines Satzes, in dem dieser Aufwand enorm verringert ist.

Eine ungerade Nichtprimzahl P hat die Eigenschaft, nicht nur durch 1 und P teilbar zu sein, sondern auch mindestens durch eine ungerade Zahl $3 \leq x \leq \sqrt{P}$; dann aber auch durch P / x .

P ist als ungerade Nichtprimzahl so das Produkt von mindestens 2 Faktoren, denn die Teiler x und P / x müssen in der Zahl P enthalten sein:

$P = x \cdot P / x$; x soll dabei der kleinere von den 2 Faktoren sein.

Man kann also x aus P ausklammern.

Ebenso kann man dieses x ausklammern aus:

$$(P \pm x); (P \pm x^2); (P \pm x^3); \dots; (P \pm x^{n-1}); (P \pm x^n)$$

Letztlich kann man den allgemeinen Satz bilden:

$$(P \pm x^n) \equiv 0 \pmod{x}.$$

In der weiteren Analyse beschränken wir uns auf den Exponenten $n = 2$ von x und die Variante des Satzes mit dem Minuszeichen:

$$(P - x^2) \equiv 0 \pmod{x}.$$

Dieser Satz bedeutet:

Für jede ungerade Nichtprimzahl existiert ein x , welches den Term

$(P - x^2)$ ohne Rest teilt, wobei $3 \leq x \leq \sqrt{P}$ und $P \geq 9$ ist.

Ist P eine Quadratzahl, dann ist $x = P / x$; $x^2 = P$ und $(P - x^2) = 0$; damit wird der Term $(P - x^2) / x = 0 / x$.

$0/x$ ist hier ganzzahlig, weil

$(P - x^2) = 0$; also $P = x^2$; damit $(x^2 - x^2) = 0$ oder $x(x - x) = 0$; somit ist $x \cdot 0 = 0$ und $0/x$ wird zu $(x \cdot 0)/x$ und damit ist $0/x$ hier ganzzahlig und erfüllt den Satz $(P - x^2) \equiv 0 \pmod{x}$.

Ist P eine Quadratzahl mit nichtprimen Wurzeln, so gibt es für den Term $(P - x^2)$ nicht nur ein $x = \sqrt{P}$; sondern auch ein $x < \sqrt{P}$.

Testen wir den obigen Satz mit den ungeraden Zahlen:

101 ; 111 ; 121

$$(101 - 3^2) / 3 = (101 - 9) / 3 = 92 / 3 = 30,6$$

$$(101 - 5^2) / 5 = (101 - 25) / 5 = 76 / 5 = 15,2$$

$$(101 - 7^2) / 7 = (101 - 49) / 7 = 52 / 7 = 7,4$$

$$(101 - 9^2) / 9 = (101 - 81) / 9 = 20 / 9 = 2,2$$

Alle in Frage kommenden x -Werte teilen $(101 - x^2)$ nicht.
Ergo: 101 ist eine Primzahl.

$$(111 - 3^2) / 3 = (111 - 9) / 3 = 102 / 3 = 34$$

Schon der erste in Frage kommende x -Wert teilt $(111 - x^2)$.
Ergo: 111 ist eine Nichtprimzahl.

$$(121 - 3^2) / 3 = (121 - 9) / 3 = 112 / 3 = 37,3$$

$$(121 - 5^2) / 5 = (121 - 25) / 5 = 96 / 5 = 19,2$$

$$(121 - 7^2) / 7 = (121 - 49) / 7 = 72 / 7 = 10,2$$

$$(121 - 9^2) / 9 = (121 - 81) / 9 = 40 / 9 = 4,4$$

$$(121 - 11^2) / 11 = (121 - 121) / 11 = 0 / 11$$

Alle in Frage kommenden x-Werte teilen $(121 - x^2)$ nicht. Aber $121 - 11^2 = 0$; also ist $121 = 11^2$; damit ist 121 selber eine Quadratzahl. Ergo: 121 ist eine Nichtprimzahl – eine Quadratzahl mit primen Wurzeln.

Der hier vorgestellte Satz $(P - x^2) \equiv 0 \pmod{x}$; entwickelt zum Auffinden von Nichtprimzahlen unter den ungeraden Zahlen P, bedeutet eine „Entschärfung“ des Wilsonschen Problems, die Unpraktikabilität des Satzes $(P - 1)! + 1 \equiv 0 \pmod{P}$; für die Zahl 111 z.B. ist $(P - 1)! = 110!$; damit ist der Rechenaufwand für das Testen der Zahl 111 mit dem Wilsonschen Satz um den Faktor $110! / 101!$ mal größer als für die Zahl 101.

Der Satz $(P - x^2) \equiv 0 \pmod{x}$ ermöglicht einen Test der Zahl 111 im obigen Sinne mit geringstem Rechenaufwand – in Frage kommen nur die x-Werte 3; 5; 7 und 9. Fängt man mit der 3 an, so ergibt schon die erste kleine Rechnung die nichtprime Eigenschaft der Zahl 111; beginnt man aber mit der 9, so hat man bereits nach vier Rechnungen das Ergebnis.