Kathrin SCHNALLE & Inge SCHWANK, Osnabrück

Das Zahlen-Hochhaus [ZH]: Multiplikative Zusammenhänge im Hunderterraum

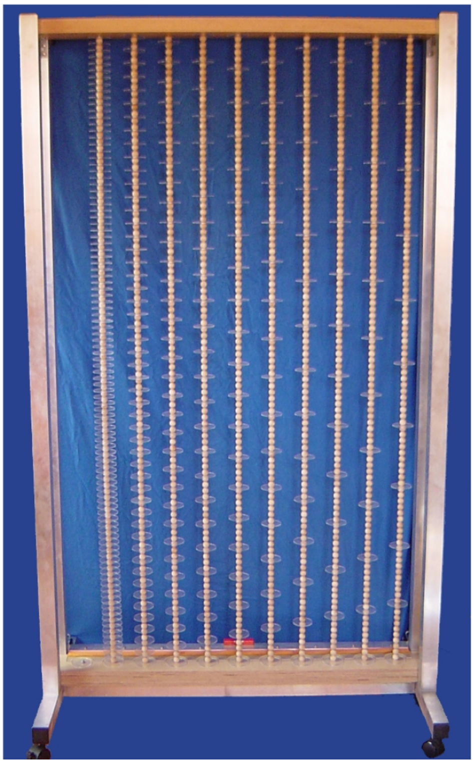

Abb. 1: Das Zahlen-Hochhaus [ZH]

Das Zahlen-Hochhaus (Abb. 1) ist eine mathematische Spielwelt zur Erforschung des Zahlenraums bis 100 unter besonderer Ausnutzung multiplikativer Zusammenhänge. Es besteht aus zehn sogenannten Treppenhäusern mit je 100 Perlen. Die Perlen sind pro Treppenhaus passend zu den 1x1-Reihen in konstanter Anzahl zusammengeleimt und die dadurch gebildeten, einzelnen Abschnitte durch Plexiglasscheiben – den Plattformen – hervor gehoben (Abb. 2). Nicht jedes Treppenhaus schließt mit einer Plattform ab; je nach 1x1-Reihe ergeben sich nach der letztmöglichen Plattform noch Reste: einzelne Perlen, die benötigt werden, um bis zur 100. Perle zu gelangen.

Abb. 2: Figur im 4er-Treppenhaus

Passend zu der Größe der Abschnitte in einem Treppenhaus gibt es Zahlenschuhpaare, die mit der Abschnittsgröße beschriftet sind. Das Tragen eines solchen Schuhpaares ermöglicht es einer Figur, sich in genau einem der Treppenhäuser von Plattform zu Plattform zu bewegen: in dem Treppenhaus, dessen Abschnittsgröße zur Beschriftung seines Zahlenschuhpaares passt. Können unterschiedlich beschuhte Figuren in ihren Treppenhäusern Plattformen auf gleicher Höhe erreichen, heißen sie dort Nachbarn und können Partys miteinander feiern. Eine Aufzugsvorrichtung im ZH erlaubt den Figuren, sich dann tatsächlich auf der Höhe ihrer Plattformen zu begegnen. Dieser Aufzug ist eine horizontal zu den Treppenhäusern bewegbare Leiste mit Einbuchtungen entsprechend der Form der Plattformen. Er kann an jeder Etage des ZH angehalten werden und so durch Überprüfung, inwieweit einige der Einbuchtungen durch Plattformen geschlossen sind, z.B. zur Kontrolle für zu erforschende Teilerrelationen dienen. Im Unterrichtsverlauf hat es sich bewährt, dass die Kinder Lineale anhalten, auf denen die Figuren sich zu ihrer Party treffen können.

Das ZH kann im Unterricht in vielfältiger Art und Weise zur Anwendung kommen. Beispielhaft seien folgende mathematische Bereiche, die mit dem ZH erforscht werden können, genannt: Zahlraumverständnis, multiplikative Zusammenhänge, Division, kgV, ggT und Primzahlen. Bei der Arbeit mit dem ZH stehen die Idee der enaktiven Form des Wissenserwerbs wie auch insbesondere die Schulung und Vertiefung funktionalen Denkens im Vordergrund. Funktionales Denken als Gegenpol zum prädikativen Denken wird im herkömmlichen Grundschulunterricht häufiger vernachlässigt. Die Arbeit am ZH ermöglicht es, wichtige Beziehungen im Zahlenraum bis 100 als Prozesse zu veranschaulichen und durch eigenes Handeln darstellbar zu machen. Dieses soll obendrein auch die Entwicklung dynamischer mentaler Bilder unterstützen. Kinder, darunter insbesondere Mädchen, denen funktionale Denkweisen schwerer fallen, können so gezielt durch eigenes Handeln ihr bisher erworbenes Wissen um funktionale Einsichten erweitern.

Aufgabenbeispiele

Pro Treppenhaus können die Multiplikations- und Divisionsreihen erforscht werden: Welche Plattformen / Zahlen werden bei welchen Sprüngen konstanter Sprunghöhe erreicht? Wie viele Sprünge sind in welchen Treppenhäusern von einer Plattform / Zahl aus nötig, um im Erdgeschoss / bei Null zu landen? Von besonderem Interesse sind Fragen, die mehrere Treppenhäuser gleichzeitig betreffen. Zum Beispiel: In welchen Höhen können besonders große oder besonders kleine Partys gefeiert werden? Wie ist das Verhältnis der Anzahl der in verschiedenen Treppenhäusern benötigten Sprünge, um auf Plattformen in gleicher Höhe zu gelangen?

Auf zwei Aufgabenstellungen wird im folgenden noch etwas näher eingegangen. Zunächst sind Überlegungen zum kgV anzustellen (Abb. 3):

Drei Figuren laufen ihre Treppenhäuser hinauf. Sie starten gemeinsam im Erdgeschoss. Auf welcher Etage können sich die drei zum ersten Mal treffen, um gemeinsam eine Party zu feiern? Eine Figur hat die 2er-Zahlenschuhe an, eine die 3er-Zahlenschuhe und eine die 4er-Zahlenschuhe.

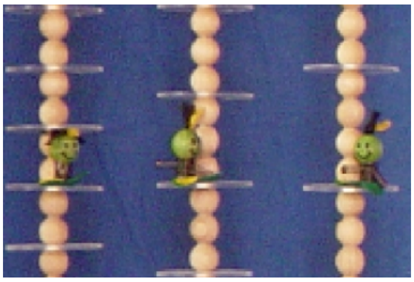

Abb. 3: kgV – so wenig hoch als möglich zur gemeinsamen Party

Das kgV wird im Rahmen einer Partyortsuche dreier Figuren erschlossen. Die Kinder erkennen anhand der Struktur des ZH recht schnell die multiplikativen Zusammenhänge der 2er-, 3er-, und 4er-Reihe. Sie haben mehrere Möglichkeiten zu einer Lösung zu gelangen. Beispielsweise können sie die Figuren – in angemessenen Sprüngen – von Plattform zu Plattform die Treppenhäuser hinauf bewegen, bis sie eine Etage gefunden haben, auf der tatsächlich alle drei Figuren Nachbarn sind. Eine andere Lösungsmöglichkeit wäre, sich visuell im ZH zu orientieren und die niedrigste Party-Etage zu lokalisieren, indem von unten her nach nebeneinander liegenden Plattformen Ausschau gehalten wird. In die Bestimmung des kgV können auch weiterreichende mathematische Argumentationen einfließen. Ein Kind der 3. Jahrgangstufe stellte z.B. folgende Überlegung an: „*Auf der zwölf – weil drei mal vier gleich zwölf. Da sind schon die drei und die vier dabei und zwei passt auf jede gerade Zahl.*“ Eine solche Aussage kann dann anhand des ZH für alle anderen Kinder demonstriert und auch überprüft werden.

Die vorgestellte Aufgabenstellung kann z.B. fortgeführt werden, indem hinterfragt wird, an welcher Stelle sich die Figuren wohl das nächste Mal, etwas höher im ZH treffen werden. Es bietet sich an, nach Begründungen und weiteren Ergebnissen und Mustern zu fragen, die dabei erkennbar werden.

Eine weitere Aufgabenstellung, die mit dem ZH erarbeitet werden kann, lautet:

Wie gelangt eine Figur über möglichst viele Treppenhäuser auf eine Plattform in der 56. Etage des Zahlen-Hochhauses?

Bei dieser Aufgabenstellung spielen sowohl die Anwendung und Ausnutzung multiplikativer Zusammenhänge als auch ein gut entwickeltes Zahlraumverständnis eine große Rolle. Alle 1x1-Reihen werden in dieser Aufgabenstellung spielerisch thematisiert, ohne dabei reproduktiven Charakter zu haben. Damit eine Figur ein Treppenhaus wechseln kann, muss sie auch ihre Schuhe wechseln. Der Einfachheit halber kann die Aufgabenstellung auch mit unbeschrifteten Schuhen durchgeführt werden. Auszunutzen sind bei der Lösung diejenigen Plattformen, von denen aus in ein anderes Treppenhaus gewechselt werden kann, also diejenigen, die sich im ZH auf gleicher Höhe befinden. Zwei verschiedene solcher Plattformen können mit unterschiedlicher Sprunghöhe erreicht werden, die Zahl die für die Plattformhöhe steht, hat beide Sprunghöhen als Teiler. Beispielhaft soll hier die Bearbeitung eines Kindes der 3. Jahrgangsstufe vorgestellt werden. In der angegebenen formalen Beschreibung (Abb. 4) stehen die Indizes für die besuchten Treppenhäusern, die größer gesetzten Zahlen für die erreichten Plattformhöhen.

0_0 ☞ 0_2 ☝ 2_2 ☞ 2_1 ☝ 3_1 ☞ 3_3 ☝ 6_3 ☞ 6_6 ☝ 12_6 ☞ 12_4 ☝ 16_4 ☞ 16_8 ☝ 24_8 ☞ ?

☞ 24_4 ☝ 28_4 ☞ 28_7 ☝ 35_7 ☞ 35_5 ☝ 40_5 ☞ 40_{10} ☝ 50_{10} ☞ ?

☞ 50_2 ☝ 52_2 ☞ 52_4 ☝ 56_4

Abb. 4: Ein Weg über die Plattformen vieler Treppenhäuser zu einer 56er-Plattform

Die Figur startet im Erdgeschoss des 0er-Treppenhauses und wechselt ins 2er-Treppenhaus, hier springt die Figur auf die 2er-Plattform und wechselt ins 1er-Treppenhaus, springt auf die 3er-Plattform, wechselt ins 3er-Treppenhaus usw. Ein erstes Problem ergibt sich, nachdem die Figur im 8er-Treppenhaus die 24er-Plattform erreicht hat. Wie soll es nun weitergehen? Der Weg über das 4er-Treppenhaus ermöglicht, die 28er-Plattform zu erreichen und von dort aus ins 7er-Treppenhaus zu wechseln, welches über die 35er-Plattform den Weg ins 5er-Treppenhaus und schließlich ins 10er-Treppenhaus ermöglicht. Es wird Zeit, sich um das Ziel, bei einer 56er-Plattform zu landen, genauer zu kümmern. Die bereits erreichte Nähe zu diesem Ziel erlaubt nur noch wenige Sprünge. Ein Wechsel ins 2er-Treppenhaus führt zur 52er-Plattform und ein letzter Wechsel ins 4er-Treppenhaus erlaubt schließlich den Sprung zu einer 56er-Plattform.

Man sieht anhand der Bearbeitung dieser Aufgabe, dass zur Lösung der Aufgabenstellung viele strategische Überlegungen angestellt worden sind und der sichere Umgang mit multiplikativen Zusammenhängen gefordert ist. Andererseits stellt die Aufgabe aber durch die Handlungsmöglichkeiten sowie die visuelle Unterstützung des Materials und die dadurch gegebene ständige Möglichkeit zur Selbstkontrolle keine Überforderung dar. Die hier dargestellte Lösung war der erste Lösungsansatz nach erstmaliger Konfrontation mit einer solchen Aufgabenstellung, und entstand nicht etwa, nachdem ähnliche Aufgabenstellungen mehrfach geübt worden waren. Tatsächlich hatten die Kinder der 3. Jahrgangsstufe zuvor erst 3 Stunden mit dem ZH in einer Kleingruppe gearbeitet.