

## Kinderinterpretationen der Multiplikation in Anlehnung an die Zeilen-Spalten-Anordnung

### Begründung

Seit einigen Jahre untersuche ich das Verständnis der Kinder<sup>1</sup>, das ihre Vorstellung der regelmäßigen geometrischen Anordnungen betreffen. Diese Formation wurde die Zeilen-Spalten-Anordnung (ZSA) genannt. Bisher haben die Kinder z. B. mit der folgenden ZSA gearbeitet (Abb. 1-3), wo die verschiedene Bedeutungsaspekte dominieren. Semadeni (2002) spricht über die Natur der Mathematik und er unterscheidet dabei drei Ebenen der Auffassung von mathematischen Begriffen: Tiefenideen, Oberflächlichenformen, formale Modelle. Den Begriff der ZSA kann man als eine Tiefenidee auffassen, wo die Definition nicht am wichtigsten ist.

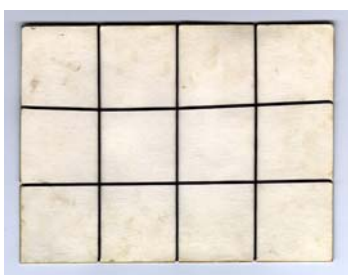


Abb. 1: Linearaspekt



Abb. 2: Punktaspekt



Abb. 3: Deckungsaspekt

Die bisherigen Untersuchungen (Outhred & Mitchelmore, 2002; Rożek, 2002) zeigen, wie schwer für Kinder im Alter 6 bis 9 Jahren das Reproduzieren der ZSA auf den Zeichnungen war. Die Kinder hatten viele Schwierigkeiten mit der vertikalen und horizontalen Koordination (Abb. 4-6).

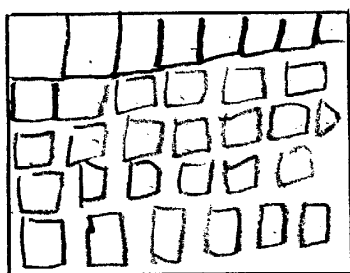


Abb. 4: Ula – 7 Jahre

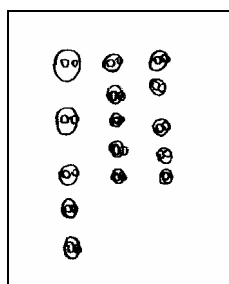


Abb. 5: Michał - 6 Jahre

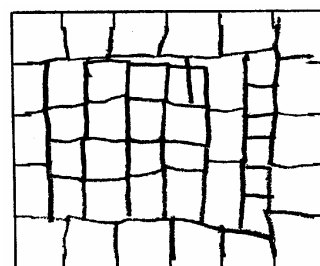


Abb. 6: Łukasz – 7 Jahre

Das Verstehen der Zeilen-Spaltenstrukturen spielt eine große Rolle bei der Einführung des Feldbegriffs (Outhred & Mitchelmore, 2002). Mit dem

<sup>1</sup> Die letzte Untersuchungen wurden teilweise von der Polnischen Forschungsgemeinschaft KBN in den Jahren 2003-2006 finanziert.

Punktmuster kann man viele Ebenen der Visuellen Strukturierungsfähigkeit entwickelt (Söbbeke E., 2003). Die geometrischen Muster eröffnen die Möglichkeiten, mathematische Aktivitäten zu entwickeln (Vogel, 2005). Die verschiedenen Zeichnungen der Kinder machen den Forscher darauf aufmerksam, dass man ZSA als reiche Struktur betrachten kann und verschiedene Konfigurationsstrukturen unterscheiden (Abb. 7-9).

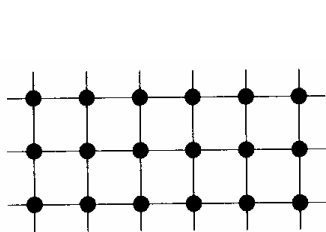


Abb. 7: Zeilen-Spalten-Struktur

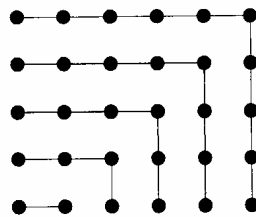


Abb. 8: Eckstruktur

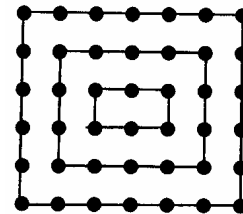


Abb. 9: Randstruktur

Im Kontext dieser Überlegung wurde nicht nur die Beobachtung der Kinderzeichnungen, sondern auch der Prozess des Zählens der Elemente der Zeilen-Spalten-Anordnung interessant. Das Verstehen der Multiplikation in Anlehnung an die ZSA verlangt die Wahrnehmung der Struktur:  $k$  Zeilen – in jeder  $n$  Elemente oder  $n$  Spalten – in jeder  $k$  Elemente. Jetzt entstehen die folgende Fragen: *Welche Arten der Konfigurationsstrukturen dominieren bei den Kindern im Prozess des Zählens der Elemente der Zeilen-Spalten-Anordnung? Welche Interpretationen der Multiplikation kann man bei den Kinder vorfinden?* Hier wird einige Episode aus der Forschungsuntersuchungen neun- bis elfjähriger Schüler beschreiben. Die Hauptuntersuchungsmethode waren der diagnostischen Aufgaben, die das Kind individuell bei dem Forscher bearbeitet hat.

### Aufgabenbeschreibung

**Aufgabe 1.** *Mit den bunten Steckern wurde ein Muster (Abb.10) erstellt. Wie viele Stecker wurden in diesem Muster gebildet?*

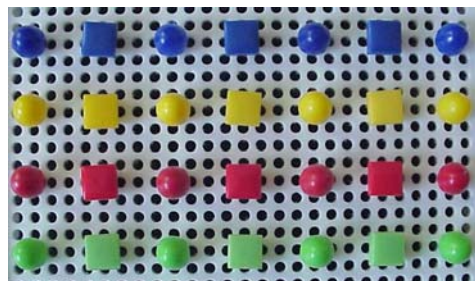


Abb. 10

**Aufgabe 2.** Die Kinder erhalten folgende Kärtchen:  $4 \cdot 7$   $7 \cdot 4$   $7 + 4$   $4 + 7$   $3 \cdot 7$   $7 \cdot 3$   $4 \cdot 6$   $6 \cdot 4$ . Das sind Kärtchen mit verschiedenen Grundrechnungsarten. Lies diese Aufgaben. Suche die Grundrechnungsaufgaben, mit

deren Hilfe die Anzahl der Stecker berechnet werden kann, und lege sie zum Muster. Lege die Aufgabe beiseite, die zum Muster nicht passen.

**Aufgabe 3.** Stelle ein eigenes Muster so dar, dass die Anzahl der Stecker mit Hilfe von diesen Grundrechnungsarten berechnet werden kann (Die Kinder erhalten folgende Kärtchen:  $5 \cdot 3$   $3 \cdot 5$ ).

**Aufgabe 4.** Erstelle irgendein Muster. Dann schreib die Grundrechnungsarten mit deren Hilfe die Anzahl der Stecker im Muster berechnet werden kann auf.

Bei der Analyse der Lösungen von Aufgabe 3 kann man einige wichtige Merkmale des Kinderverhaltens unterscheiden. Diese Merkmale zeigen, wie große Bedeutung die Eckstruktur und die Randstruktur spielen.

### Bedeutung der Eckestruktur (die erste Zeile und erste Spalte)

- Kamil (10 Jahre, 9 Monate) baut in der dritten Aufgabe die linke Spalte mit 5 Stecker und dann füllt er in jede Zeile 3 Stecker (Abb. 11). Nach einer kurzen Pause spricht er: *Schlecht. Es gibt 5 Reihen und in jeder sollten 3 Stecker sei. Und ich habe in jeder 4.* Kamil hat selbst seinen Fehler bemerkt. Beim zweiten Versuch hat er die letzte Spalte weggenommen und er hat eine passende Anordnung erstellt.
- Łukasz (10 Jahre, 5 Monate) ordnet 3 Stecker vertikal und 5 horizontal an (Abb. 12). Dann füllt er das auf diese Weise festgelegte Rechteck mit den 15 Stecker auf. Auf die Frage: *Warum findest du, dass dein Muster zu der Rechenart  $5 \cdot 3$  passt?* antwortet er: *Hier sind 5 (die obere Zeile) und hier 3 (die linke Spalte) und er behauptet, dass 15 Stecker sind.* Dann zählt er die einzelnen Elemente und er spricht weiter: *Oh! Es ist schlecht!* Dann nimmt Łukasz die erste Spalte und die untere Zeile weg.

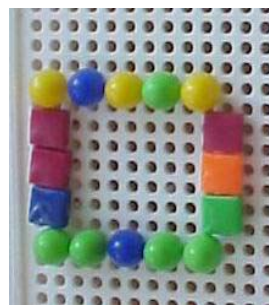


Abb. 11: Kamil

Abb. 12: Łukasz

Abb. 13: Malwina

Abb. 14: Justyna

### Bedeutung der Randstruktur

- Malwina (10 Jahre, 11 Monate) bildet zwei Spalten mit jeweils 3 Quadratstecker und zwei Zeilen oberhalb und unterhalb mit jeweils 5 weiteren Stecker (Abb. 13). Auf diese Weise hat sie den Rahmen eines Rechtecks geordnet. Sie findet, dass ihre Muster zu der Rechenart  $3 \cdot 5$  passt: *Hier*

sind 3 (sie zeigt die Quadrate) und hier 5 (sie zeigt auf die obere Zeile) und das ist  $3 \cdot 5$ . Dann zählt Malwina die Stecker in diesem Muster und sie multipliziert sie  $3 \cdot 5$ . Sie bekommt verschiedene Ergebnisse, aber sie ist nicht im Stande dieses Muster korrigieren.

- Justyna (10 Jahre; 5 Monate) ordnet in der vierten Aufgabe den Rahmen des Quadrates (Abb. 14). Jede Seite des Quadrates ist aus 7 Stecker gebaut. Quadrat hat 4 Seiten. Deshalb schreibt sie die folgende Grundrechnungsarten:  $4 \cdot 7 = 28$ ,  $7 + 7 + 7 + 7 = 28$ ,  $7 \cdot 4 = 28$ .

## Bemerkungen

Die Multiplikation in Anlehnung an die Zeilen-Spalten-Anordnung bedeutet für Kinder sehr oft eine Regel, die sie automatisch verwenden. Die Zeilen-Spalten-Anordnung ist für Kinder die geometrische „Situation“, die sie sehr einfach erkennen und bei der immer zu multiplizieren ist. Den Kindern fällt es in der dritten Aufgabe schwer, alle Zusammenhänge zwischen der Multiplikation und der Struktur des Musters zu erfassen. Sie haben sehr oft nur an die Eckstruktur oder Randstruktur gedacht, dabei haben sie die Elemente der ersten Spalte und die ersten Zeile gezählt und multipliziert. Sie können sehr oft richtige Ergebnisse erzielen, obwohl ihnen das Verständnis der Bedeutung dieser Zahlen nicht bewusst ist. Es ist schwierig eindeutig festzustellen, ob dem Kind bei dem Zählen der Elemente in der ersten Spalte bewusst ist, dass es auf diese Weise gleichzeitig die Zeilen gezählt hat. Es ist wahrscheinlich, dass das Kind bei der Multiplikation in dieser Anordnung die Situation „so viel mal so viel“ nicht erkannt hat.

## Literatur

Outhred, L. & Mitchelmore, M. (2002) Across the great divide: From counting to subdivision of rectangular area, In R. Nata (Ed.) *Progress in Education*, Vol 5. New York: Nova Science Press

Rożek, B. (2002) Denkschema eines Zeilen-Spalten-Anordnungs bei Kindern im Alter von 6 bis 9 Jahren, *Beiträge zum Mathematikunterricht*, Franzbecker, 427-430

Rożek, B. (2004) Kinderschwierigkeiten beim Verstehen des Kommutativgesetz, *Beiträge zum Mathematikunterricht*, Franzbecker, 485-489

Semadeni, Z. (2002) Trojaka natura matematyki: idee głębokie, formy powierzchniowe, modele formalne, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **24**, 41-92

Söbbeke E. (2003) Grundschulkindern deuten Strukturen in Anschauungsmittel hinein – Qualitative und epistemologisch orientierte Analyse der „Visuellen Strukturierungsfähigkeit“, *Beiträge zum Mathematikunterricht*, Franzbecker, 605-608

Vogel, R. (2005) Muster – eine Leitidee mathematischen Denkens und Lernens, *Beiträge zum Mathematikunterricht*, Franzbecker, 585-588