Reinhard OLDENBURG, Göttingen

Mathematik, Realität und Experiment

Zum Verhältnis von Mathematik und Realität

Mathematik gilt nicht als empirische Wissenschaft. Mathematische Sätze werden durch einen innermathematischen Beweisprozess als wahr erwiesen, nicht durch die erfolgreiche Bestätigung in einem Experiment. Diese Sicht verführt aber leider dazu, die Bedeutung von Experimenten in der (individuellen) Genese von Mathematik zu unterschätzen. Dabei ist schon die Voraussetzung, die Unabhängigkeit mathematische Sätze von der Erfahrung, nicht unumstritten. So hat etwa Quine in seiner holistischen, naturalisierten Erkenntnistheorie den Schluss gezogen, dass das geistige System des Menschen als ganzes, also inklusive der Mathematik, evolutionärer Bewährung unterliegt. Die scheinbar privilegierte, von der Erfahrung her „unantastbare“ Stellung der Mathematik ergibt sich aus ihrer zentralen Position im Gefüge der "mental beliefes": Änderungen an der Mathematik sind eine äußerst unökonomisch Form der Adaption, weil sie durch vielfältige Vernetzung unüberschaubare Konsequenzen hätten. Es lässt sich nun leicht eine didaktische Konsequenz aus dieser philosophischen Position ziehen: Mathematik festigt sich durch vom Schüler erlebte Bewährung in der Realität.

Der Modellbildungskreislauf neu betrachtet

Der Modellbildungskreislauf ist seit über 20 Jahren (Blum 1985) eine Ikone der Bewegung des realitätsbezogenen Mathematikunterrichts und mittlerweile vielfach modifiziert worden. Gemeinsam ist allen Fassungen, dass ausgehend von einer realen Situation zunächst ein Realmodell abstrahiert wird, das anschließend in ein mathematisches Modell übersetzt wird. Dieses kann gelöst und die Ergebnisse wieder in der Ausgangssituation interpretiert und validiert werden. Wichtig scheint mir dabei, dass man den Übersetzungsvorgang von Realmodell zu mathematischem Modell als kreativen Prozess versteht. Wenn man hier von einer mechanischen Übersetzung ausgeht, beraubt man die Schüler u. U. einer wichtigen Möglichkeit, kreativ zu sein. Dass in der Tat nicht von einer mechanischen Übersetzung gesprochen werden kann, zeigt sich beim Beispiel der Entladung eines Kondenstors. Das Realmodell besteht aus einem idealisierten Spannungsmessgerät, idealem Kondensator mit unendlichem Widerstand etc. Mögliche Mathematische Modelle nutzen Differentialgleichungen, Differenzengleichungen oder gleich eine exponentielle Modellierung. Auch diese Position steht im Einklang mit einem theoretischen Befund von

Quine. Laut seiner Unbestimmtheitsthese sind unsere Theorien von der Erfahrung her unterbestimmt.

Der Vergleich Realität-Modell im Validierungsschritt kann mögliche Realität-Modell-Differenzen offen legen. Davon gibt es mehrere Arten:

- Vereinfachung (GPS, Erdnavigation auf Kugel)
- Ersatzwirklichkeit: Modell nicht authentisch, aber brauchbar (Splines im Straßenbau)
- Modell in Realität unbrauchbar (Computertomographie nach Kirchgraber (Istron 6)), aber prinzipiell OK in einer idealisierten Realität
- Modell vollkommen unangemessen

Man muss sich klar machen, dass diese Differenzen nicht einfach ein Übel sind, sondern, in gewissem Umfang, notwendig zum Schritt der Theoriebildung gehören.

Mathematische Schülerexperimente

Bei einem mathematischen Schülerexperiment interagieren die Schüler mit einer außermathematischen Realität im Sinne einer wechselseitigen Beeinflussung zum Zwecke der Erkenntnisgewinnung. Damit geht das Experiment über die Verwendung von Modellen zur Veranschaulichung hinaus.

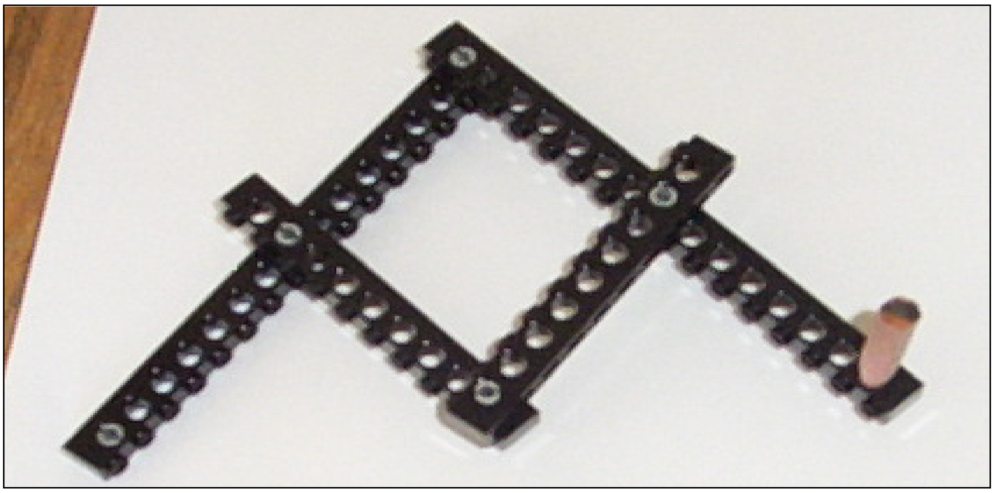
Die Experimente können im Unterricht verschiedene Prozesse anregen:

- Modellbildung (z.B. Abkühlung einer Kaffeetasse)
- Argumentation (z.B. Spiegelsymmetrie)
- Begriffsbildung (z.B. Riemer-Würfel)
- Problemlösung (z.B. Flächen auswiegen, Schwerpunkt finden)

Beim Modellieren schließt das Experiment den Modellbildungskreislauf, indem es unmittelbare Rückmeldung aus der Realität liefert. Gestaltungsspielraum und Kompetenzerleben sind der Lohn auf Schülerseite. Dies kann zu einer wiederholten Durchlaufung des Modellbildungskreislaufes führen.

Beispiel: Als Material wird gegeben ein PC mit geeigneter Software, die Terme in Schalldruckpegel umsetzt. Mit einer vom Autor entwickelten MuPAD-Erweiterung erklingt nach Eingabe des Befehls *PlayFunction(0.4*sin(440*2*PI*t,t=0..1)* ein mäßig lauter Sinuston von 440Hz. Ziel des Experimentes ist z.B. einen heulenden Sirenenton zu erzeugen.

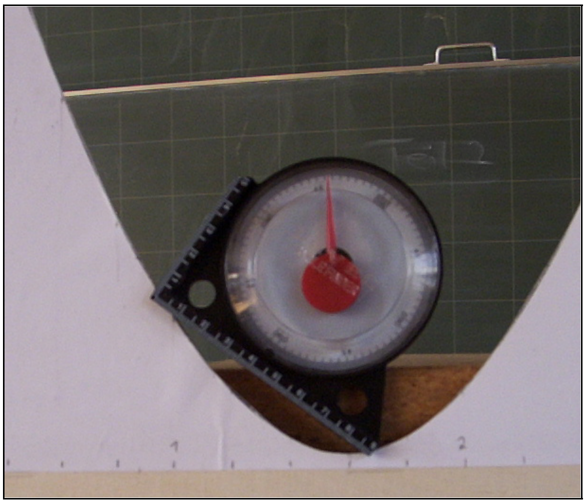
Beispiel: Pantographenmodelle können z.B. aus Lego-technic schnell und preiswert hergestellt werden. An diesen Pantographen können Schüler argumentieren und modellieren. Die Lernsituation ist dabei reichhaltiger als bei der Arbeit mit einem mit einem Dynamischen Geometrie-System realisierten Pantographen, weil dort stets eine spezielle Modellierung zugrunde gelegt werden muss. Man kann am DGS-Pantographen anders als am realen Objekt eben nur an einem bestimmten Punkt ziehen. Auch der Auftrag an die Schüler, andere Streckfaktoren zu realisieren, setzt ganz andere – nämlich durch die Software erzwungene – Operationsfolgen in gang.



Mathematische Schülerexperimente zur Ableitung

Erstaunlicherweise ist es oft gerade bei sehr abstrakten Themen möglich, mit mathematischen Schülerexperimenten Lernprozesse anzuregen. Im Analysisunterricht stellen die Sekanten- und Tangentensteigung, b.z.w. die mittlere und die momentane Änderungsrate ein problematisches Gebiet dar. Oft bilden Schüler nur unzureichende Grundvorstellungen aus (Malle 2003). Nach einem eigenen Unterrichtsversuch kann dem erfolgreich entgegengewirkt werden, indem die Theorieentwicklung sich im Einklang mit experimenteller Erfahrung entwickelt. Dazu hatten die Schüler und Schülerinnen einer elften Klasse Gelegenheit, in einer selbst gesteuerten Lernphase mit einer Reihe von Experimenten zu arbeiten. Neben bereits öfter in der Literatur beschriebenen Experimenten wie dem Normalenspiegel und der Vermessung von Bewegungen mit einem Ultraschallsensor, kamen dabei auch neue Versuchsideen zum Einsatz. Mit im Fachhandel preiswert angebotenen Steigungsmessern kann an Funktionsgraphen aus Holz die Steigung gemessen werden. Dabei kann der Steigungsmesser entweder mit seiner kurzen oder seiner langen Seite aufgesetzt werden, so dass entweder die Steigung einer kurzen b.z.w. einer langen Sekanten bestimmt wird. An konvexen Teilen des Graphen liegt er tangential an, und es ergibt sich sofort aus der Situation, dass es zwischen der Steigung der Sekanten und der der Tangenten eine Beziehung geben muss.

Bei einem anderen Experiment ist ein Funktionsgraph als krumme Wand auf einer waagrechten Platte aufgebaut. An der Wand rollt eine Murmel entlang. Ab dem Ende der Führungswand bewegt sie sich geradlinig. Um vorherzusagen, wo die Murmel letztlich auftreffen wird, müssen die Schüler die Idee der linearen Approximation der (Führungs-)Kurve durch ihre Tangente entwickeln und zu ihrer Berechnung einen geeigneten Differenzenquotienten finden.



In der Einheit haben die Schüler eine Vielzahl von Varianten des Differenzialquotienten gefunden. Mehrere Schüler kamen selbst auf die Idee, den Term des Differenzenquotienten für immer kleinere Δx zu untersuchen.

Eine wichtige Beobachtung war, dass viele Schüler, die bei einem Experiment zunächst kein (für sie) befriedigendes Ergebnis erzielen konnten, zu diesem Experiment zurück gekehrt sind, nachdem sie an anderer Stelle weiter gekommen waren. Der Unterricht muss also so organisiert sein, dass die Schüler möglichst langfristig auf die Versuche zugreifen können.

Literatur

W. Blum: Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion, Mathematische Semesterberichte (1985)

M. Ludwig, R. Oldenburg: „mathematik lehren“-Themenheft „Mathematische Schülerexperimente“, erscheint 2007.

G. Malle.: Vorstellungen vom Differenzenquotienten fördern. mathematik lehren 118, 2003, S. 57-62.