

Andreas MARX, Paderborn

Schülervorstellungen zu unendlichen Prozessen und die „Basic Metaphor of Infinity“

Im Rahmen einer qualitativen Untersuchung wurde mit jeweils zwei Schülern offene, problemzentrierte Interviews geführt, wobei das behandelte Problem stets einen unendlichen Prozess zur Grundlage hatte. Dabei zeigen die Schüler verschiedene Ansätze, wie sie mit der Frage nach dem „Ergebnis“ eines unendlichen Prozesses umgehen. Diesem deskriptiven Teil möchte ich die „Basic Metaphor of Infinity“ (kurz: BMI) nach Lakoff und Núñez zur Seite stellen. Abschließend werde ich den Grenzwertbegriff für Folgen in der Analysis in den Fokus rücken, um einige Konsequenzen im Hinblick auf Lernprozesse von Schülern und die Akzentuierung von Unterricht zu ziehen.

BMI

Lakoff und Núñez nähern sich unendlichen Prozessen von Seiten der Linguistik, wo unter dem „aspect“-Konzept eine Struktur verstanden wird, mit der Handlungen und Ereignisse durch Sprache beschrieben werden: „Readiness, Starting up, The main process, Possible interruption and resumption, Iteration or continuing, Purpose, Completion, Final state“ (vgl. Lakoff und Núñez 2000)

Lakoff und Núñez führen weiter aus, dass nicht nur die Sprache, sondern auch unser „Konzeptsystem“ nach dieser Struktur organisiert ist.

Lakoff und Núñez unterscheiden zwischen dem „perfective aspect“ und dem „imperfective aspect“. Im Rahmen des „perfective aspects“ wird eine Handlung als Ganzes wahrgenommen, wobei der Blick auf dem Abschluss liegt. Der „imperfective aspect“ fokussiert eher auf die interne Prozessstruktur. Ein Beispiele für den „perfective aspect“ ist die Tätigkeit „Springen“. Der Blick liegt auf der Handlung als Ganzes wobei die Landung als Teil des Sprungs angesehen wird. Demgegenüber steht die Tätigkeit „Atmen“. Der Blick liegt auf den einzelnen Atemzügen, wobei der Abschluss des Atmens – das Einstellen des Atmens – in der Regel nicht der Tätigkeit „Atmen“ zugeordnet wird.

An diese Differenzierung anknüpfend beschreiben Lakoff und Núñez zwei Wege, wie Prozesse mit einem Abschluss konzeptualisiert werden können.

1. Der Abschluss liegt innerhalb des Prozesses.
2. Der Abschluss liegt außerhalb des Prozesses.

Mit diesem Konzept nähern sich Lakoff und Núñez nun endlichen und unendlichen Prozessen in der Mathematik. Bei endlichen Prozessen ist der Abschluss Teil des jeweiligen Prozesses. So endet z.B. die schriftliche Division von zehn durch vier mit Zwei Komma Fünf, wobei dieses Ergebnis Bestandteil des Prozesses ist.

Bei unendlichen Prozessen liegt der Abschluss außerhalb des Prozesses. Ein Beispiel hierfür könnte die schriftliche Division von eins durch drei sein. Null Komma Periode Drei wird nicht durch dem Prozess erreicht.

In Abbildung 1 stellen Lakoff und Núñez die Struktur eines endlichen Prozesses der Struktur eines unendlichen Prozesses in der Mathematik gegenüber.

Dabei soll das Schema das Bestreben ausdrücken, auch im Falle von unendlichen Prozessen, wie bei endlichen Prozessen auch, den „Abschluss“ als wesentliches Element eines unendlichen Prozesses hervor-

Source Domain		Target Domain
COMPLETED ITERATIVE PROCESSES		ITERATIVE PROCESSES THAT GO ON AND ON
The beginning state	→	The beginning state
State resulting from the initial stage of the process	→	State resulting from the initial stage of the process
The process: From given intermediate state, produce the next state.	→	The process: From given intermediate state, produce the next state.
The intermediate result after that iteration of the process	→	The intermediate result after that iteration of the process
The final resultant state	→	“The final resultant state” (actual infinity)
Entailment <i>E</i> : The final Resultant state ist unique and follows every nonfinal state.	→	Entailment <i>E</i>: The final Resultant state ist unique and follows every nonfinal state.

Abb. 1: “Basic Metaphor of Infinity”
(vgl. Lakoff und Núñez 2000)

zuheben. Der hervorgehobene Bereich zeigt diese Abweichung von der ursprünglichen Konzeptualisierung eines unendlichen Prozesses mit Fokus auf der Prozessstruktur.

Im Rahmen der BMI lassen sich zunächst Beschreibungs- und Argumentationsweisen direkt aus dem Ausgangsbereich in den Zielbereich übertragen – in beiden Fällen gibt es einen Startpunkt, eine Iteration und mögliche Unterbrechungen. Interessant und schwierig wird es aber erst in dem gekennzeichneten Bereich. Was soll unter dem Ergebnis eines unendlichen Prozesses verstanden werden? Und wenn darauf eine erste Antwort gefunden ist, wie kann dieses präzise gefasst werden? Eine Antwort liefert die Analysis.

Die Schlussweise mit Hilfe einer Metapher beinhaltet zwei charakteristische Elemente: Analoge Elemente, wo die Erkenntnisse aus dem Ausgangsbereich direkt auf den Zielbereich übertragen werden und verschiedene Elemente, die neue Erklärungen fordern.

Blick auf Schülerüberlegungen

Die Schüler zeigen vielfältige Strategien mit unendlichen Prozessen umzugehen. Ich werde hier einige Beobachtungen zusammenfassen. Für detaillierte Beschreibungen anhand von Interviewauszügen sei hier auf Marx 2006 verwiesen.

Die Schüler weisen den von ihnen beschriebenen unendlichen Prozessen keine Ergebnisse zu. Stattdessen versuchen sie diese als Ganzes möglichst genau zu beschreiben. Bemerkenswert ist dabei, dass sie auf periodische Dezimalzahlen zurückgreifen, um die Dynamik der von ihnen beschriebe-

nen Prozesses zum Ausdruck zu bringen. Sie behandeln periodischen Dezimalzahlen wie eine Art „veränderliche Größen“¹ und keineswegs wie „feste“ Zahlen. Periodische Dezimalbrüche haben in den Augen der Schüler auch keinen Punkt auf der Zahlengeraden, sondern mehrere, oder sie „wandern“ oder ähnliches (vgl. auch Marx 2005). Schüler können sich durchaus Zahlen vorstellen, mit denen sie unendliche Prozesse beschreiben können.

Andere Schüler arbeiten mit einer Art Permanenzprinzip im eigentlichen Sinne des Wortes. Erkenntnisse, die während der Iteration gewonnen wurden, werden auf das „Ergebnis“ des unendlichen Prozesses übertragen.

Diese Denkweise, bei der Eigenschaften aus dem Endlichen ins Unendliche weitergeführt werden, hat eine lange Tradition. Einer der berühmtesten Vertreter dieser Argumentationsweise ist Leibniz mit seinem Kontinuitätsprinzip, bei dem er z.B. die Ruhe als unendlich kleine Bewegung ansieht (vgl. Guicciardini 1999). Der neu zu klärende Aspekt innerhalb der BMI wird durch eine Fortführung von aus dem Endlichen bekannten Beobachtungen beschrieben.

Eine entscheidender Aspekt im Hinblick auf die BMI ist die Beobachtung, dass es Schülern gelingt einen Unterschied zwischen endlichen und unendlichen Prozessen herauszuarbeiten. Die Schüler dringen an die zentrale Stelle der BMI - die Frage nach dem „Ergebnis“ unendlicher Prozesse - vor. Sie haben jedoch sehr vielfältige Ideen, wie man mit diesem Problem umgehen könnte.

Einige Konsequenzen

Der Grenzwertbegriff für Folgen in der Analysis gibt eine Antwort auf die Frage, was unter dem „Ergebnis“ eines unendlichen Prozesses verstanden werden kann und in welchem Verhältnis ein unendlicher Prozess zu seinem „Ergebnis“ steht.

Das einsichtige Arbeiten mit Folgen setzt aber voraus, dass es einen „echten“ Bedarf nach solchen Objekten gibt. Es bedarf der Erkenntnis, dass man mit ihnen etwas beschreiben kann, was ohne nicht gelang. Dieses ist nicht unbedingt der Fall, wenn Schüler in periodischen Dezimalzahlen Partner finden, mit denen sie unendliche Prozesse beschreiben können.

Es wird deutlich, wie wichtig die Vorstellungen von Zahlen als Basis zur Beschreibung unendlicher Prozesse sind. Umgekehrt trifft man auch im Rahmen von Zahluntersuchungen immer wieder auf unendliche Prozesse. Der Zahlentwicklung innerhalb der Unter- und Mittelstufe kommt eine große Bedeutung zu.

Die zweite Konsequenz nimmt Bezug auf den Lehrplan der gymnasialen Oberstufe im Land NRW. Die Behandlung von Folgen und Reihen ist für den Einstieg in die Oberstufe nicht mehr vorgesehen.

¹ In Anlehnung an die unendlich kleinen Größen bei Weierstraß. (vgl. Weierstraß 1881)

Ich halte die Behandlung dieses Themas aber aus mindestens zweierlei wesentlichen Gründen für notwendig. Zum einen bieten Folgen eine Möglichkeit „offene“ Fragen aus der Mittelstufe, etwa die Division eins durch drei, die Kreisexhaustion, das Heron-Verfahren oder allgemein Intervallschachtelungen erneut zu thematisieren und mit Hilfe des Grenzwertbegriffs auf einer neuen Stufe zu betrachten. Dabei bietet sich auch die Gelegenheit Vorstellungen zum Zahlbegriff zu hinterfragen und auszuschärfen. Es ist insbesondere zu klären, inwiefern Zahlen eine gewisse Dynamik beinhalten oder eben nicht.

Der Grenzwertbegriff bildet im Hinblick auf die BMI gewissermaßen einen Höhepunkt. Es wird zum einen ein unendlicher Prozess möglichst präzise mit einer Folge und daran anschließend das „Ergebnis“ des unendlichen Prozesses als Grenzwert der Folge beschrieben.

Gleichzeitig kann der Grenzwertbegriff bei Folgen aber auch einen Ausgangspunkt für den Analysisunterricht der Oberstufe bilden. Welch ungleich höhere Bedeutung kann den Begriffen Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit beigemessen werden, wenn in ihnen nicht bloße Werkzeuge zur Untersuchung von Funktionen gesehen werden, sondern in ihnen die Beherrschung der Unendlichkeit zum Ausdruck kommt?!

Ein Unterricht sollte daher zumindest gelegentlich die Müße bieten, über Grundfragen der Mathematik - wie hier am Beispiel des Unendlichen - nachzudenken, um so ein Bild von Mathematik als Teil der menschlichen Kultur zu entfalten. Schüler sind in der Lage und daran interessiert sich mit solchen Aufgaben sinnvoll auseinander zu setzen. Es gelingt ihnen den Kern des Problems herauszuarbeiten. Dieses ist meines Erachtens der Anfang eines verständigen Umgangs mit mathematischer Begriffsbildung.

Literatur

- [Guicciardini 1999]: Guicciardini, N.: “Newtons Methode und Leibniz’ Kalkül”, in: Jahnke, H.N.(Hrsg.): Geschichte der Analysis; Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg/Berlin 1999, S.191-244
- [Lakoff/Núñez 2000]: Lakoff, G.; Núñez, G.: Where Mathematics Comes From, How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being, Basic Books New York, 2000
- [Marx 2005]: Marx, A.: „Ein Drittel gleich Null Komma Periode Drei ist ungenau.“, in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2005, Franzbecker Hildesheim/Berlin, 2005
- [Marx 2006]: Marx, A.: „Schülervorstellungen zu unendlichen Prozessen“, im Druck.
- [Weierstraß 1881]: Weierstraß, K.: Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre, Teubner-Archiv zur Mathematik - Band 9, Siegmund-Schultze, R. (Hrsg.), BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leibniz 1988