Matthias Ludwig , PH Weingarten

Die Fußball WM 2006 im mathematischen Blick

Bei Mathematik und Fußball denkt man meist nur an den Ball der aus fünfeckigen und sechseckigen Lederstückchen besteht. Natürlich da steckt viel Mathematik drin, vor allem wenn man noch die anderen Möglichkeiten auslotet die es gibt einen Ball schön symmetrisch und rund herzustellen. Es soll aber versucht werden, die Mathematik die im Fußballspiel und drum herum existiert hervorzuheben. Warum? Nun eines ist doch klar: der Mathematik und auch dem Mathematikunterricht wird zuweilen Weltfremdheit, Starrheit und Trockenheit vorgeworfen. Vermeintlich ist es in den naturwissenschaftlichen Unterricht einfacher Umweltbezüge und Aktualitätsbezüge herzustellen. Hier wird z.B. öfters die Gentechnik (Gewinnung der eigenen DNS) im Biologieunterricht oder Umwelttechnik (Solarenergie) im Physikunterricht angeführt. Dabei vergisst man aber, dass dies nur sehr spezielle Gebiete sind und die meist nur in den wenigen oberen Klassenstufen behandelt werden kann. Genau betrachtet ist es mit den Aktualitätsbezügen im naturwissenschaftlichen Unterricht nicht weit her, im Gegenteil sie sind bezogen auf ein ganzen Schülerleben sehr dünn gesät. Im Mathematikunterricht gelingt ein Aktualitätsbezug eigentlich viel einfacher: Wilfried Herget z.B. macht das regelmäßig in seiner Rubrik „Mathematik aus der Zeitung“ in der Zeitschrift Mathematik lehren vor. Man ist hier zwar auf die Fauxpas´ der Zeitungsredakteure angewiesen, aber die lassen einen miot schöner Regelmäßigkeit nicht im Stich.

Die Mathematik großer Ereignisse.

Es gibt auch noch eine andere Möglichkeiten Aktualitätsbezug in den Mathematikunterricht zu bekommen: Es besteht nämlich die Möglichkeit Teile der verwendeten, aber versteckten Mathematik bei Großereignissen wie Fußballweltmeisterschaften, großen Radrennen oder olympischen Spielen zu studieren. Oftmals ist es die Mathematik der unteren Sekundarstufe I die man dort wieder findet und welche zu erstaunlichen Kenntnissen und Ergebnissen führen kann. Es müssen nicht gleich lineare Optimierung, Extremwertberechungen oder neue diskrete Verfahren behandelt bzw. benutzt werden. Oftmals reicht das Rechnen mit Größen, Abschätzungen, die Ausnutzung von Proportionalität, Prozentrechnen, die geschickte Anwendung des Dreisatzes oder einfache Wahrscheinlichkeitsrechnung, sowie Elementargeometrie.

Mathematik im Fußballspiel

Kommen wir nun zur Mathematik der Fußball-WM 2006. Wegen der Kürze und der für den Mathematikunterricht gebotenen Nachhaltigkeit will ich mich hier auf mathematische Fragen konzentrieren die mit Fußball zu tun haben und natürlich auch, aber nur mittelbar etwas mit der WM 2006.

Denkt man mathematisch oder das Fußballspiel nach so ergeben z.B. solche möglichen Fragestellungen zum Thema (siehe auch Ludwig 2006, Wesson 2005):

Warum sind die Spielfeldmaße so wie sie sind? Nun das liegt daran, dass Fußball aus England kommt und dort noch die Maßeinheiten Inch, Fuß und Yard existieren. 1Yard sind 3 Fuß und 1Fuß sind 12 Inch, ein Inch entspricht 2,54cm. Und so erklärt sich die Torbreite von 7,32m und Torhöhe von 2,44m ganz einfach in 8 Yard und 8 Fuß. Und der Fünfmeterraum ist eben 6 Yard, der Elfmeterpunkt 12 Yard vom Tor entfernt und der 16-Meterraum 18Yard groß. Passend zu den Spielfeldmaßen: Wie lange sind die Rohre der Rasenheizung in einem Fußballstadion und wie viele Badewannen Frostschutzmittel werden zum Füllen der Rohre benötigt? Wo ist der beste Platz im Stadion? Gibt es ein mathematisches Modell für die Trefferquote beim Elfmeter? Warum fliegt der Ball, wenn er von der Hand abgeschlagen wird weiter, als wenn er vom Boden abgeschossen wird? Warum spielen 10 Mann beim Fußball? Warum machen wenig Tore die Bundesliga interessanter? Warum fallen bei einem Spiel, beim dem der Außenseiter gewinnt meist eine ungerade Anzahl von Toren? Wie wird der Spielplan der Bundesliga gemacht? Wie lange ist die Schnur mit der ein Fußball zusammengenäht ist? Welche Ballformen gibt es eigentlich? Wie viele Möglichkeiten gibt es eigentlich einen Ball zusammenzunähen? Warum gewinnt Deutschland 2006 die Weltmeisterschaft im eigenen Land? Auch Fermifragen bieten sich an: Wie hoch würde das Bier, welches während allen WM- Spielen in den Stadien getrunken wird auf einem Spielfeld stehen? Wie viele Fußbälle gibt es überhaupt in Deutschland, in Europa oder auf der Welt?

Warum gibt es zehn Feldspieler?

Okay, gehen wir der Sache mit den 10 Feldspielern auf den Grund. Warum sind es zehn und nicht 15 oder 20 Spieler. Die Sache ist sicherlich historisch durch Regeln bedingt und hat sich so ergeben, aber warum hat sie sich so ergeben? Wir versuchen eine mögliche Antwort. Nun es liegt auf der Hand, dass die Spielfeldgröße durchaus einen Einfluss auf die Spieleranzahl hat. Je kleiner das Spielfeld, desto weniger Spieler. Sonst würde das Spiel zu hektisch werden. Wie bei einem Flipperspiel würde der

Ball hin- und herfliegen und es könnten sich keine Spielzüge entwickeln weil der Gegner viel zu schnell stören könnte. Die Grundlage für einen guten Spielzug ist, dass man den Ball unter Kontrolle bringt, dann die Übersicht gewinnt und schließlich den Ball kontrolliert weiterspielt. Für so eine Aktion kann man ungefähr 3 Sekunden rechnen. Das würde bedeuten, dass man 20 solche Aktionen pro Spielminute hat. Das stimmt ziemlich gut mit der Realität überein. In diesen drei Sekunden muss also der Gegner eine reelle Chance haben den Ball zu erreichen. Wir betrachten nun die Fläche die ein Spieler in diesen drei Sekunden abdecken kann. Die „Höchstgeschwindigkeit“ liegt bei 10m/s. Wir können also in unserem einfachen Modell mit 5m/s als mittlere Geschwindigkeit rechnen. Der Gegner kann also in den drei Sekunden einen Kreis mit Radius 15m abdecken das. Dem entspricht einer Fläche von gut 706 m^2. Ein mittleres Fußballfeld hat die Maße 68m x 105m, dies ergibt eine Fläche von $7140m^2$. Das bedeutet, dass man mit 10 Feldspielern das Spielfeld ideal abgedeckt hätte. Dieses Modell passt auch auf die Spieleranzahl beim Eishockey.

Wo ist der beste Platz im Stadion?

In modernen Fußballstadien ist zwischen den Zuschauerrängen und dem Spielfeld keine großen Zwischenraum mehr. Gibt es im Stadion einen besten Platz, unter dem man das Spiel besonders gut beobachten kann? Um das mathematisch an zugehen, müssen wir „bester Platz“ definieren. Es ist sicherlich eine vernünftige Definition anzunehmen, dass man mit „bester Platz“ einen Sitzplatz meint, von dem aus man die beiden Tore unter einem möglichst großen Winkel sehen kann. Wir könnten die Definition abschwächen und sagen es reicht aus, ein Tor unter einem möglichst großen Winkel zu sehen. Dieses Problem hat nämlich auch ein potentieller Torschütze, der, wenn er z.B. auf Linksaußen auf die Torauslinie zu rennt, im besten Moment schießen muss. Wie man sich denken kann, ist das ein geometrisches Problem.

Dass es eine optimale Schussposition, bzw. einen optimalen Sitzplatz geben muss liegt auf der Hand. Befindet man sich schon auf der Torauslinie ist ist der Sichtwinkel gleich null und wenn man sehr weit weg ist, ist der Winkel auch fast Null. Also muss es dazwischen ein Maximum geben. Die Lösung des Problems liegt nun darin den optimalen Punkt zu finden.

Angenommen der Spieler läuft auf der gelben Geraden in Richtung des linken Tores, so ist seine beste Schussposition dort, wo der Kreis durch die beiden Torpfosten die Laufgerade berührt. Die Abbildung 1 zeigt die durch die Ortslinienkonstruktion entstandenen Hyperbeläste. Die

Hyperbeln mit der Gleichung $y^2-x^2=c^2$ laufen asymptotisch gegen die Winkelhalbierenden der einzelnen Spielfeldviertel.

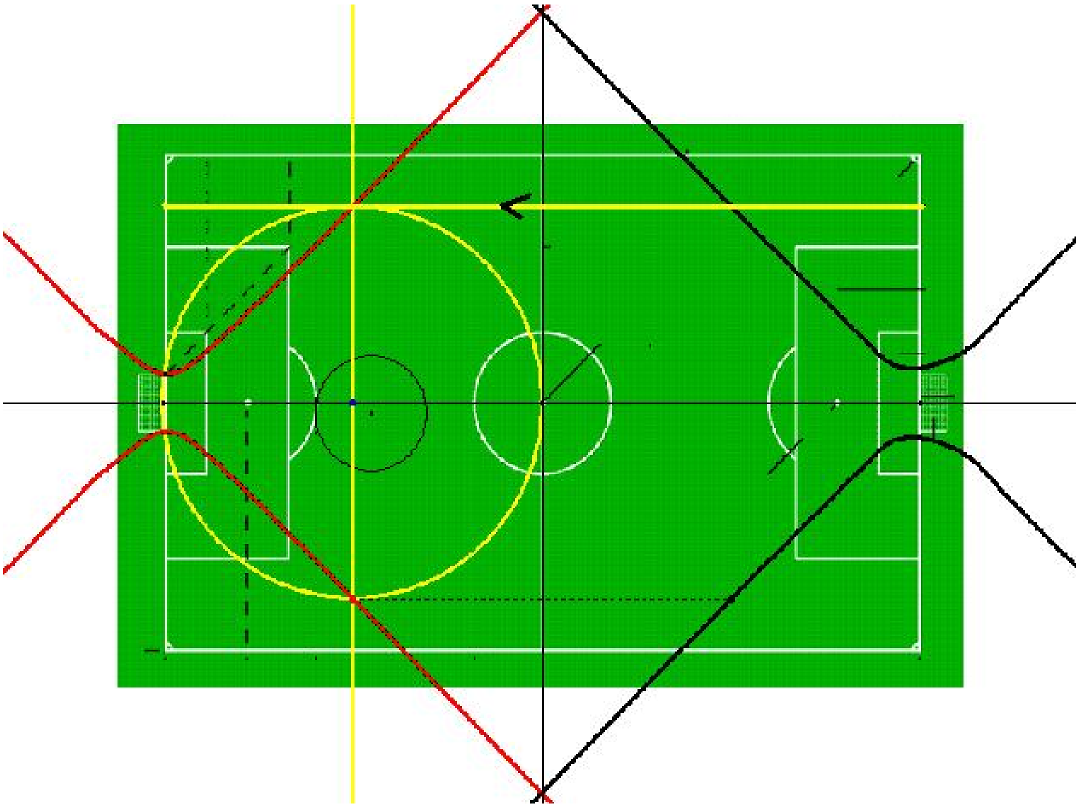

Abbildung 1: Die Hyperbeläste als geometrischer Ort der besten Schuss- und Sitzposition. Der Berührpunkt des Kreises durch die beiden Torpfosten mit gelben Laufgeraden“ ist optimale Schusspunkt, oder der optimale Sitzplatz.

Fußballmathematik und die Einbettung in den Unterricht.

Die eben angesprochenen Fragen lassen sich gut im Unterricht oder für besondere Fußball-Kinder-Unis bzw. aktuelle Lehrerfortbildungen umsetzen. Denn jeder kennt die Fußballbasics (11 Leute sind in einem Team, das Spiel dauert 90 Minuten) und wenn nicht hat man sie schnell erklärt. Es ist faszinierend zu beobachten, wie die Schüler und auch die Lehrerinnen und Lehrer die Macht der Mathematik neu oder zum ersten Mal bewusst erleben, dass es mit einfachen Rechnungen und Größenabschätzungen möglich ist, alltägliche und angeblich völlig mathematikfreie Dingen zu erklären und zu deuten.

Literatur:

Herget, W. Scholz, D. (2006): Die etwas andere Aufgabe, aus der Zeitung Kallmeyer´sche Verlagsbuchhandlung.
Ludwig, M. (2006): Fußballmathematik, Mathewelt in: mathematik lehren 135,
Wesson, J. (2006). Fußball- Wissenschaft mit Kick, Heidelberg, Elsevier Verlag
Augustin, E., et al. (2005), Fußball unser, Süddeutsche Zeitung