

Katja LENGNINK, Darmstadt

## **Das Stellenwertsystem als Prinzip vom Rechnen mit wenigen Steinen: Reflektierend mathematisch handeln**

Zum Einstieg in das Thema Zahldarstellungen und Zahlbereichserweiterungen wurde im Schuljahr 04/05 eine Gruppe von 30 Schülerinnen und Schülern des 7. – 9. Jahrganges mit unterschiedlichen Materialien zum Visualisieren von Rechnungen ausgestattet. Die Materialien wurden soweit nötig durch Begleitbögen erläutert und die Lernenden wurden gebeten, in Partnerarbeit mit ihrem Material die folgenden Aufgaben zu rechnen und dabei über ihr Material und ihr Vorgehen nachzudenken:

### **Arbeitsauftrag:**

Führe die folgenden Rechnungen mit Hilfe deines Materials aus. Was klappt gut mit diesem Rechenmittel und was klappt weniger gut bzw. gar nicht?

$$573 + 56 =$$

$$327 - 48 =$$

$$18 : 5 =$$

Beschreibe bei jeder Aufgabe dein Vorgehen.

### **Material:**

Erbsen

Steine (versch. Größen)

Tontäfelchen

Schnüre der Inka

Fingerfeilschen

Römische Ziffern

Abakus

Das Ziel dieses Einstiegs war es einerseits, über die Materialien, ihre Stärken, Schwächen und Grenzen im Rahmen der Darstellung von Zahlen nachzudenken. Darüber hinaus bot sich in der Lernumgebung Gelegenheit, das eigene mathematische Handeln zu reflektieren.

### **Eine Episode zum Rechnen mit Steinen**

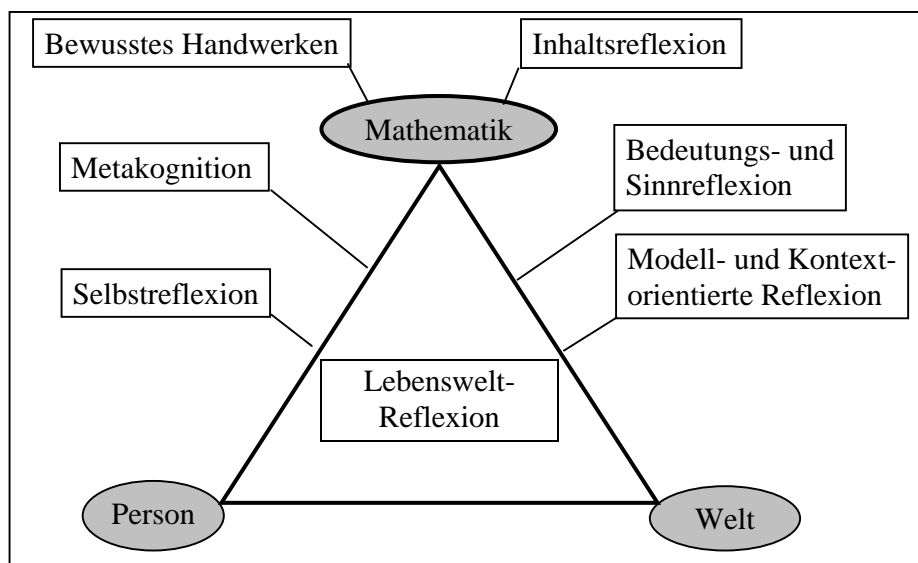
Antonia und Valentin, Förderschüler aus dem 8. Jahrgang, bekamen 35 Kieselsteine in verschiedenen Größen. Nach einigen Minuten sprechen sie mich an: „Wir haben nicht genug Steine.“ Antonia erzählt, dass sie die Steine gezählt habe. Sie reichten nur für die Division, die hätten sie bereits gelöst. Sie deutet einen Verteilungsprozess von 18 abgezählten Steinen auf 5 Haufen an. ( $18 : 5 = 3$  Rest 3.) „Es sind aber nicht genug Steine für die anderen Aufgaben“, sagt sie erneut. „Die mit den Erbsen haben eine ganze Schüssel voll, die reicht bestimmt.“ Ich schlage vor, zu überlegen, worin sich die Kieselsteine von den Erbsen unterscheiden. Die beiden betrachten ihr Material erneut. Sie stellen fest, dass die Kieselsteine unterschiedlich aussehen und auch verschiedene Größen haben. Valentin beginnt zu sortieren.

Für den mathematischen Durchbruch muss der Blick durch Vergleiche mit den anderen Gruppen geweitet werden: „Was stellt eine Erbse in der Rechnung der anderen Gruppe dar? Warum geht das hier bei den Steinen nicht? Wie könnt ihr eure Sortierung nutzen und euch behelfen?“ Nach diesem mühsamen Prozess des Nachdenkens über eigene Handlungen und Hand-

lungsmöglichkeiten nimmt einer der beiden einen Stift und beschriftet die kleinen Steine mit 1, die mittleren mit 10 und die großen mit 100. Im Verhältnis zu diesem Abstraktionsschritt ist es nun unproblematisch, die beiden noch verbliebenen Aufgaben zu rechnen. Antonia hat sogar eine Idee, wie sie mit dem unbefriedigenden Ergebnis aus der Divisionsaufgabe umgehen könnten (Rest 3). Sie holt sich bei der Erbsengruppe dreißig Erbsen und verteilt erneut, um auch die Zehntel darzustellen.

## Reflektieren von Mathematik

Reflexionen sind im Lernprozess bedeutend, um einen angemessenen Umgang mit dem jeweiligen Gegenstand zu erreichen, wie Jablonka (2003) in der Diskussion um mathematical literacy herausgestellt hat. Sie beziehen sich immer auf die Beziehungen zwischen Fach, Person und Welt. In der mathematikdidaktischen Literatur werden unterschiedliche Reflexionsebenen in den Blick genommen (vgl. etwa Neubrand 1990, Bauer 1990, Kaune 2001, Skovsmose 1998, Fischer o.J., Lengnink 2005). Im Schaubild werden diese Ebenen idealtypisch in das obige Beziehungsgeflecht eingeordnet.



Mit den einzelnen Ebenen werden unterschiedliche Bedeutungen von Reflexion im Lernprozess hervorgehoben. So geht es bei der Inhaltsreflexion, dem Bewussten Handwerken und der Metakognition vor allem um effektives Lernen von Mathematik, die Bedeutungs- und Sinnreflexion sowie die Modell- und Kontextorientierte Reflexion heben vor allem einen verständigen Umgang mit Mathematik und eine kritische Beurteilung von Mathematik und ihren Anwendungen hervor, die Selbstreflexion und die Lebensweltreflexion betonen die persönliche Positionierung im Umfeld der Mathematik. (Wie stehe ich zur Sache? Was ist mir an einer Situation wichtig: Wo hilft mir Mathematik zum Beschreiben? Wo hat sie ihre Grenzen?). Sie tragen so zum mathematischen Mündigwerden bei.

### **Reflektieren beim Rechnen mit Steinen**

Im obigen Beispiel wurden auf unterschiedlichen Ebenen Reflexionsprozesse angeregt, die zum verständigen Umgang mit Mathematik und zu einer Handlungskompetenz beitragen können. So wird etwa eine *Inhaltsreflexion* durch die Beschränkung auf wenige Steine angestoßen: „Mit wenigen Steinen muss es auch gehen.“ Es werden *metakognitive Prozesse* ausgelöst: „Wir brauchen eine andere Idee als die mit den Erbsen.“ „Wir wollen immer nur einen Stein für eine eins nehmen, so geht es aber nicht.“ Rückschauend: „Wo waren unsere Denkbarrieren, was hat uns beim Überwinden geholfen?“ *Bewusstes Handwerken* kann durch folgende Fragen angeregt werden: „Wie sind wir vorgegangen? Welche Handlungen waren mathematisch tragfähig und warum? Welche nicht?“ Auch die *Selbstreflexion* kommt vor: „Es ärgert uns, dass du uns so wenig Steine gegeben hast.“ Das Beispiel birgt durch den Trick des Beschriftens ein Potenzial für *Bedeutungsreflexionen*: „Wenige Steine sind besser als viele Erbsen.“ Hier kann die Ökonomie des Stellenwertsystems handelnd erfahren werden.

### **(Mathematisch) Handeln beim Rechnen mit Steinen**

Handeln und Denken sind eng verbunden. Denken wird etwa von Piaget (1971) als verinnerlichtes Handeln angesehen und bewusstes Handeln setzt Denken voraus. Da die Bedeutung des Handelns beim Lernen unbestreitbar ist, lohnt es sich, Handlungen auch beim Mathematiklernen zu reflektieren, um den Lernenden Handlungsspielräume innerhalb der Mathematik zu eröffnen, um ihnen aber auch die Handlungsspielräume der Mathematik bewusst zu machen. In diesem Beitrag wird ein weiter Handlungsbegriff zugrunde gelegt: Eine Handlung ist ein Prozess, der einem *Handlungsziel* dient, dessen Verwirklichung im *Handlungsergebnis* von dem *Handelnden* gewollt ist. Dazu können Objekte der Handlung (*Handlungsmittel*) herangezogen werden (vgl. Mittelstraß 2004). Handeln umfasst somit nicht nur materiell gestützte Tätigkeiten, sondern auch geistige Prozesse.

In der Lernumgebung „Zahldarstellungen und Zahlbereichserweiterungen“ wurden die Handlungsmittel der Kleingruppen bewusst eingeschränkt. Damit wurde bei äußerlich gleichem Handlungsziel (der Darstellung der Rechnung mit Hilfe des Materials) ein Verlaufsspektrum und Ergebnisprofil vorgegeben. Das Variieren der Handlungsmittel in der Lernumgebung ermöglicht, über die Grenzen und Möglichkeiten der einzelnen Handlungsmittel zu reflektieren und sie in Bezug auf die Güte der Repräsentation zu vergleichen. Erbsen erweisen sich dabei als zu umständlich, Steine und die Stellenwertidee dahinter als ökonomisch, symbolisch umsetzbar und formalisierbar, Römische Ziffern als schlecht zu addieren, der Abakus als große Hilfe beim Materialisieren und Algorithmieren von Rechnungen. In diesem Feld werden Zahldarstellungen und Zahlbereichserweiterungen

als Antworten auf Handlungsengpässe verstehbar, in denen jeweils die Handlungsmittel verändert wurden, um den neuen Rahmenbedingungen zu genügen.

Die Handlungsmittel schränken die Handlungsmöglichkeiten der Lernenden ein. Damit war in der Lernumgebung angelegt, auch den Handlungsverlauf zu reflektieren. Durch Verändern der Handlungsmittel im Handlungsprozess (etwa beim Beschriften der Steine) werden auch die Handlungsspielräume neu festgelegt, was andere Handlungsebenen erschließt.

### **Fazit und Ausblick: Lernumgebungen zum reflektierenden Handeln**

Lernumgebungen zum reflektierenden Handeln zeichnen sich aus durch

- Handlungssituationen, die unterschiedliche Handlungsspielräume eröffnen und damit einen Vergleich anregen;
- Das Vereinbaren von Handlungszielen;
- Muße zum eigenen Handeln;
- Unterrichtsgespräche über das eigene Handeln und das Handeln anderer auf der Basis eigener Erfahrungen;
- Reflexionen über Zwecke, Ziele und Erfolg der Handlungen aus mathematischer Sicht, um spezifisch mathematische Vorgehensweisen und Ansprüche zu verdeutlichen.

Weitere Entwicklungsarbeit besteht darin, geeignete Lernumgebungen zu schaffen, die verschiedene Reflexionsebenen beim Handeln aktivieren. In ihnen können Zwecke mathematischer Beschreibungsansätze und Darstellungsmittel deklariert und Perspektiven bewusst gemacht werden. So kann langfristig ein Begriffslernen mit einer Handlungskompetenz verbunden werden, die Lernende zum mündigen Umgang mit Mathematik befähigt.

### **Literatur**

- Bauer, L. (1990): Mathematikunterricht und Reflexion, in: ML, Heft 38, S. 6 – 9.
- Fischer, R. (o. J.): Höhere Allgemeinbildung I und II. Unveröffentlichtes Manuskript, Klagenfurt/Wien.
- Jablonka; Eva (2003): Mathematical Literacy, in: Bishop et al. (Hrsg.): Second International Handbook of Mathematics Education, Kluwer, Dordrecht, S. 75 – 102.
- Kaune, Ch. (2001): Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts: Die kognitionsorientierte Aufgabe ist mehr als „die etwas andere Aufgabe“, in: MU 35, S. 35 – 46.
- Lengnink, K. (2005): Mathematik reflektieren und beurteilen: ein diskursiver Prozess zur mathematischen Mündigkeit, in: Lengnink & Siebel (Hrsg.): Mathematik präsentieren, reflektieren, beurteilen, Verlag Allg. Wissenschaft, Mühltal, S. 21 - 36.
- Lengnink, K. (in Vorb.): Action and Reflexion in Mathematical Learning, ZDM, 2006.
- Mittelstraß, J. (2004): Enz. Philosophie und Wissenschaftstheorie II, Metzler, Stuttgart.
- Neubrand, M. (1990): Stoffvermittlung und Reflexion: mögliche Verbindungen im Mathematikunterricht, in: Math. Did. (13), S. 21 – 48.
- Piaget, Jean (1971): Psychologie der Intelligenz, Walter Verlag, Olten.
- Skovsmose, O. (1998): Linking Mathematics Education and Democracy, in: ZDM 30(6), S. 195-203.