

In Poznań findet jedes Jahr ein Festival für Wissenschaft und Kultur statt, das zum Ziel hat, Wissenschaft zu Popularisieren und Forschungen in einer attraktiven und für alle Besucher anziehenden Form darzustellen. Mathematik ist zwar eine formale Wissenschaft, aber auch in ihrem Bereich kann man Probleme finden, die einerseits Gegenstand für aktuelle Forschungen sind, andererseits lassen sich einige von ihren Aspekten in einer für Laien zugänglichen Form darstellen. Zu solchen Forschungsgebieten gehört Arithmetik konvexer Mengen¹. In diesem Artikel präsentieren wir einen Vorschlag zur Visualisierung interessanter Probleme aus dem Bereich Arithmetik konvexer Mengen.

1. Operationen auf konvexen Mengen

Für kompakte konvexe Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$ und für $\lambda \in \mathbb{R}$ definiert man folgende Operationen:

- Minkowski-Summe: $A \oplus B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$;
- Produkt der Menge A durch den Faktor λ : $\lambda A := \{\lambda a \mid a \in A\}$;
- Minkowski-Differenz: $A - B := A \oplus (-B)$, wobei $-B := \{-b \mid b \in B\}$.

2. Konvexe Hülle

Konvexe Hülle einer Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist die kleinste konvexe Menge in \mathbb{R}^n , die die Menge A enthält. Sie wird als $\text{conv}(A)$ bezeichnet. Die konvexe Hülle zweier Teilmengen A und B aus \mathbb{R}^n bezeichnet man $A \vee B := \text{conv}(A \cup B)$. Die konvexe Hülle einer endlichen Punktmenge heißt (konvexes) Polytop.

Beispiel 1.



Abb. 1

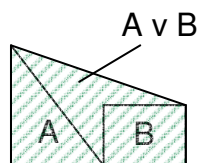


Abb. 2

¹ An der Adam Mickiewicz Universität in Poznań (Fakultät Mathematik und Informatik) beschäftigt sich mit dieser Problematik eine Gruppe von Wissenschaftlern unter der Leitung von Prof. Ryszard Urbański. Forschungen werden in einer Zusammenarbeit mit Prof. Diethard Pallaschke realisiert. In dieser Zusammenarbeit haben sie das Buch "Pairs of Compact Convex Sets, Fractional Arithmetic with Convex Sets", (Serie Mathematics and Its Applications, vol.548, Kluwer Academic Publisher 2002, Dordrecht-Boston-London) herausgegeben.

3. Minkowski-Summe für kompakte konvexe Mengen

Die Minkowski-Summe zweier konvexen Mengen lässt sich algebraisch, durch Umreißen der Mengen und durch Ordnen der Seiten bestimmen. Wir werden zwei dieser Möglichkeiten präsentieren.

3.1 Minkowski-Summe (algebraisch)

Die Minkowski-Summe zweier konvexen Mengen ist wieder eine konvexe Menge. Um diese algebraisch zu bestimmen reicht es nur die Spitzenpunkte der neuen Menge zu berechnen. Diese werden nach der Definition der Minkowski-Summe berechnet.

Beispiel 2

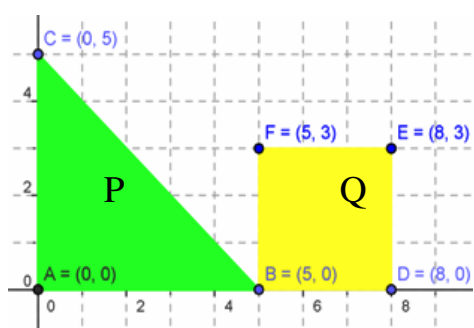


Abb. 3

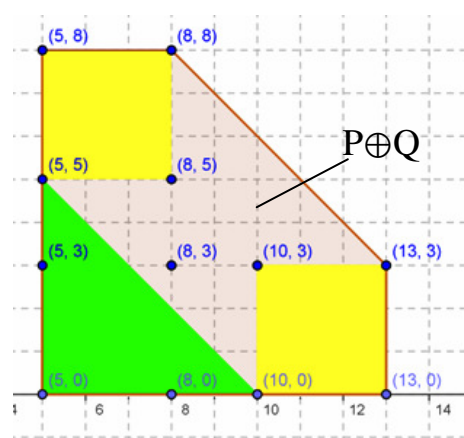


Abb. 4

Für die Spitzenpunkte der Menge P und Q haben wir folgende Ergebnisse:
 $A+B=(5,0)$, $B+B=(10,0)$, $C+B=(5,5)$, $A+D=(8,0)$, $B+D=(13,0)$, $C+D=(8,5)$,
 $A+E=(8,3)$, $B+E=(13,3)$, $C+E=(8,8)$, $A+F=(5,3)$, $B+F=(10,3)$, $C+F=(5,8)$.

3.2 Minkowski-Summe (Umreißen der Menge)

Bei konvexen Mengen kann die Berechnung der Minkowski-Summe sehr leicht graphisch erfolgen: man schiebt ein Polytop auf dem Rand des anderen entlang und der überdeckte Bereich ist die Minkowski-Summe. Diese Methode erfolgt daraus, dass man die Minkowski-Summe als die Vektorsumme auffassen kann. Für Visualisierung dieser Methode ist es möglich, verschiedene mathematische Werkzeuge, sowohl didaktische Spielzeuge als auch Computerprogramme wie z.B. das Programm GeoGebra, anzuwenden. Mit diesem einfachen Programm lassen sich interessante Eigenschaften der Minkowski-Summe darstellen. Beispielweise kann man auf Grund einer Animation zeigen, dass sich die Form der Minkowski-Summe $A \oplus B$ nicht ändert, wenn man die Lage von A und B in dem Koordinatensystem ändert. Bei der Verschiebung der gegebenen Mengen ändert sich nur die Lage des Ergebnisses.

Beispiel 3

An diesem Beispiel zeigen wir Schritte, die zur Bestimmung der Minkowski-Summe durch Umreißen der Mengen führen.



Abb. 5

4. Äquivalenzrelation für Paare konvexer Mengen

Sei $K(\mathbb{R}^n)$ die Menge aller kompakten konvexen Mengen des Euklidischen Raum \mathbb{R}^n . In dem Produkt $K(\mathbb{R}^n) \times K(\mathbb{R}^n)$ definiert man die Äquivalenzrelation \sim : $(A,B) \sim (C,D) \Leftrightarrow A \oplus D = B \oplus C$.

Ein Paar (A,B) ist als Minimaldarstellung definiert, bzw. heißt minimal, falls es kein äquivalentes Paar (C,D) gibt, das echt kleiner ist, d.h. $C \subset A$, $C \neq A$ und $D \subset B$, $D \neq B$.

5. Analogie von kompakten konvexen Mengen und natürlichen Zahlen

Fasst man die Minkowski-Summe als Produkt und die konvexe Hülle als Summe zweier kompakten konvexen Mengen auf, dann bilden diese eine kommutative Halbgruppe mit Addition genau so wie die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

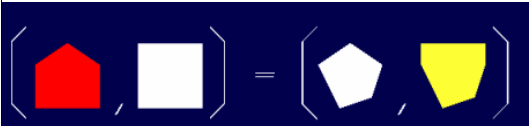
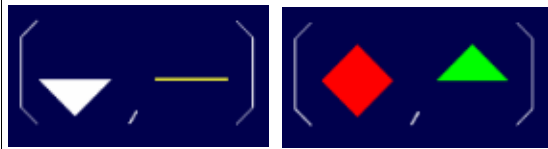
Mit Hilfe von einfachen mathematischen Werkzeugen lassen sich Analogien von kompakten konvexen Mengen und natürlichen Zahlen leicht visualisieren. In der Tabelle A stellen wir die wichtigsten Analogien, die schon für Gymnasialisten verständlich sein können, zusammen.

6. Historische Symbole und Kunst

Unter minimalen Paaren kompakter konvexer Mengen sind viele historische Symbole zu finden, zu denen auch der David Stern gehört. Konvexe Mengen findet man auch in der Kunst. Auf dem Bild Melancholie von Albrecht Dürer befindet sich, unter vielen mathematischen Symbolen, eine konvexe Menge aus dem Raum \mathbb{R}^3 , die sich als die Minkowski-Summe konvexer Mengen darstellen lässt².

²Eine Gruppe von Wissenschaftlern aus Poznań, unter der Leitung von Prof. Ryszard Urbański, versucht diese Menge als Minkowski-Summe kompakter Mengen darzustellen. Ergebnisse Ihrer Forschungen werden bald in einem Artikel veröffentlicht.

Tabelle A: Analogien von konvexen kompakten Mengen und natürlichen Zahlen.

Kompakte konvexe Mengen	Natürliche Zahlen
Konvexe Hülle ($A \vee B$): $A \vee B = B \vee A$; $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$.	Addition ($a + b$): $a + b = b + a$; $(a + b) + c = (a + b) + c$.
Distributivgesetz: $A \oplus (B \vee C) = (A \oplus B) \vee (A \oplus C)$.	Distributivgesetz: $a * (b + c) = a*b + a*c$.
Minkowski-Addition und Minkowski-Subtraktion sind nicht gegenseitig umgekehrte Operationen: $A - B = C \not\Rightarrow C \oplus B = A$.	Addition und Subtraktion sind gegenseitig umgekehrte Operationen: $a - b = c \Leftrightarrow c + b = a$.
Äquivalenzrelation: $(A,B) \sim (C,D) \Leftrightarrow A \oplus D = B \oplus C$.	Äquivalenzrelation: $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$.
Die äquivalenten Paare von kompakten konvexen Mengen fasst man als Brüche auf. <u>Beispiel</u> 	Die Äquivalenzklasse entspricht der Definition eines Bruches: <u>Beispiel</u> $(1,2) \sim (2,4)$
Minimale Paare kompakter konvexer Mengen werden als teilerfremde Brüche gesehen. <u>Beispiel</u> 	In \mathbb{N} sind bezüglich der Ordnung „ \leq “ die minimalen Paare genau die teilerfremden Brüche. <u>Beispiel</u> In der Äquivalenzklasse $1/2 = 2/4 = 3/6 = \dots$ ist das Paar $(1,2)$ minimal und der Bruch $1/2$ ist teilerfremd.
Das minimale Paar ist nicht eindeutig bestimmt ³ .	Das minimale Paar ist eindeutig bestimmt (das erfolgt daraus, dass die Primfaktorzerlegung eines Elementes bis auf die Permutation eindeutig ist).

³ Den Fall für die Ebene konnten Stefan Scholtes, Karlsruhe, und Jerzy Grzybowski, Poznań, in ihren Dissertationen klären.