

Dieter KLAUDT, Ludwigsburg

## Operieren am mentalen Zahlenstrahl

Gibt man Kindern in Klasse 1 der Grundschule die Aufgabe: 'Zeichne die Zahlen 0, 5, 11, 19, 20 auf den Rechenstrich', dann erhält man z.B. folgende Bilder:

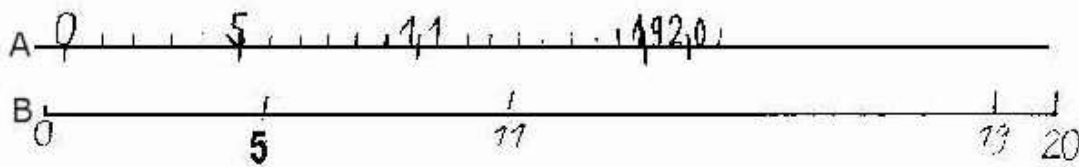


Abbildung 1: Papier-Bleistift Konstruktionen des Zahlenstrahls

Bei diesen fertigen Papier/Bleistift Konstruktionen am Rechenstrich (leerer Zahlenstrahl) wird nicht deutlich, dass die Kinder ihre Konstruktionen mit ganz unterschiedlichen Strategien aufbauen. Auf den ersten Blick sieht Konstruktion A (s.o.) sogar genauer aus, als Konstruktion B, sie enthält eine Skalierung und die Längenverhältnisse scheinen genauer getroffen als in Figur B. Diese Beurteilung der fertigen Produkte muss man jedoch revidieren, wenn man sich das Vorgehen der beiden Kinder, den Konstruktionsprozess, ansieht. Kind A wendet Zählstrategien an, der Zahlenstrahl wird schrittweise aufgebaut, beginnend bei Null. Kind B konstruiert völlig frei und nutzt operative Strategien, bei denen der gesamte Kontext, also das Wissen über die Zahlen in der Umgebung, Relationen und Operationen verwendet werden (siehe *Klaudt 2003, 63f: 'How children construct the number line.'* und *Klaudt/Spannagel 2004, 248f*). Die verschiedenen Strategien können aber nur während der Konstruktion beobachtet, oder an der fertigen Konstruktion durch Interviewtechniken ans Licht gebracht werden. Es kann deshalb nicht nur das Endprodukt beurteilt werden, wenn man sich für den Prozess interessiert.

## Mentale Zahlvorstellung

Mit mentaler Zahlvorstellung wird unsere interne Vorstellung von Zahlen bezeichnet, die dabei hilft, kleinere Anzahlen zu schätzen, Relationen zwischen Zahlen zu beurteilen, bestimmte Zahlen und ihre Nachbarschaft in den Blick zu nehmen, usw.... Dieses ‚Wissen über Zahlen‘, die Semantik einer Zahl ist nach *Dehaene [1992]* in einem Modul repräsentiert das als ‚Analoge Repräsentation der Zahlengrößen‘ (analogue magnitude representation) bezeichnet wird. Hier ist die größen- und auch mengenmäßige Bedeutung des gespeicherten Zahlenwissens angelegt. Das

Modul ermöglicht das Vergleichen von Anzahlen über die internen Zahlengrößen sowie Überschlagsrechnungen. Die numerischen Größen, also die Zahlen, sind räumlich repräsentiert. Diese automatische Verknüpfung zwischen Zahl und Raum führt zu einem einfachen, aber bemerkenswert guten Bild für die mentale Repräsentation numerischer Größen in unserem Gehirn, nämlich zum Zahlenstrahl.

## Metaphern und Mathematiklernen

Dieses Wissen über die interne Repräsentation von Zahlen ist jedoch für den Mathematikunterricht nicht ausreichend. Um unterrichten zu können, muss man Kenntnisse darüber haben, wie dieses Wissen über Zahlen aufgebaut wird. *Lakoff/Nunez [2000]* gehen davon aus, dass die Grundideen dieses Wissens, das über die Zahlen aufgebaut werden muss schon als interne Denkstrukturen angelegt sind, die dann im Unterricht aktiviert werden sollten. D.h., die Ideen als Strukturen sind schon da, sie müssen nur angeregt und verknüpft werden und zwar durch Metaphern, die Bezug nehmen auf diese vorhandenen Strukturen. Genau diese Strukturgleichheit ermöglicht dann das selbständige Lernen in Mikrowelten. Man hat mit den Metaphern bekannte Werkzeuge die einem helfen, in einem neuen Gebiet neues Wissen und neue Fähigkeiten selbständig zu lernen. Für die Bewegung am realen oder gedachten mentalen Zahlenstrahl spielen zwei Metaphern eine Rolle. Die Bewegungsmetapher veranschaulicht die Bewegung, vorwärts und rückwärts, während die Meterstabmetapher eher die Proportionalität und die operationalen Zusammenhänge ausdrückt: vier Schritte sind zwei mal zwei Schritte, egal welche Skalierung momentan gerade verwendet wird.

## Mikrowelten im LOGO-System

Für die Umsetzung der Ideen in eine computerbasierte Mikrowelt wurde ein LOGO-System verwendet. Alle Mikrowelten versuchen, bei den Kindern Vorstellungen zum mentalen Zahlenstrahl und zu den Zahlvorstellungen zu aktivieren und sollen die Kinder gleichzeitig anregen, ihre Vorstellungen unter Verwendung der Metaphern zu explizieren. Die Mikrowelten haben verschiedene Kontexte und Ausprägungen, die in *Klaudt [2005]* beschrieben werden. Die Daten der Schüler aus den Mikrowelten wurden in Protokolldateien gesammelt um sie danach automatisch auswerten zu können. In der ebenfalls durchgeführten Visualisierung der Daten nach deren Bearbeitung werden die Daten anschaulicher.

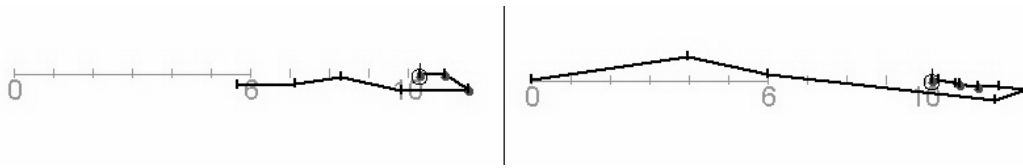


Abbildung 2: Beispieldaten - Visualisierung des Arbeitsprotokolls

## Ergebnisse

Die Untersuchung der Zusammenhänge zwischen den Strategien in den Mikrowelten und mathematischen Grundfertigkeiten, die in verschiedenen standardisierten mathematischen Leistungstests zu Beginn und nach einem Jahr am Ende des Projekts erhoben wurden, zeigt:

- Kinder, die in den Mikrowelten häufig Strategie 3 (Direktstrategie) wählen, haben auch beim mathematischen Eingangstest und beim Abschlusstest höhere Punktzahlen erreicht. Es gibt also einen deutlichen Zusammenhang zwischen mathematischen Fertigkeiten und mentaler Zahlvorstellung.
- Kinder, die beim Eingangstest im Bereich 'Zählen' und beim Abschlusstest erfolgreich sind, wählen bei der Konstruktion des Zahlenstrahls gerade nicht die primitive Zählstrategie sondern eine Direktstrategie.
- In den Mikrowelten haben diejenigen Kinder viele richtige Lösungen, die in den Teilbereichen 'Zählen', 'Merkmale erkennen' und 'Proportionalität' der mathematischen Tests erfolgreich waren.
- Kinder, die bei den mathematischen Tests erfolgreich sind, arbeiten in den Mikrowelten erfolgreicher und genauer. Sie haben mehr richtige Lösungen und eine geringere Abweichung von der gesuchten Zahl.
- Geringe Durchschnittszeiten bis zum ersten Klick in der ersten Mikrowelt gehen gleichzeitig einher mit hohen Punktzahlen in den mathematischen Tests. Diese Kinder können ihre mentalen Modelle und ihr Wissen offensichtlich schnell aktivieren.

## Zusammenfassung

Durch Aufzeichnungs- und Visualisierungswerkzeuge, wie sie im CEKA-Projekt entwickelt, genutzt und in der vorliegenden Arbeit präsentiert wurden, können die Abläufe der individuellen Wissenskonstruktionen am

Computer bei Kindern aufgezeichnet und bei Bedarf wiedergegeben werden (*Protokollbeispiele siehe: Klaudt 2005*). Den Lehrenden wird so konstruktives Wissen, bzw. Wissen über Teilkonzepte, das Schüler bereits erworben haben, in anschaulicher Weise des informatischen Protokolls zugänglich gemacht. Durch die Dynamik die sich in jeder Visualisierung der Bearbeitungsprotokolle zeigt, wird zusätzlich der Prozesscharakter des Lernens betont. Lernen ist ein aktiver, individueller, sich wiederholender Prozess, der eine immer bessere Anpassung an die Problemstellung erreicht. Damit rückt das individuelle Lernen in den Mittelpunkt des Interesses der Lehrpersonen. Dieses Lernen kann dann nicht mehr nur über Lernzielkategorien beschreiben werden, sondern muss mit Hilfe von evaluierenden Forschungsmethoden begleitet und unterstützt werden. Der Lehrer ist in solch einem Kontext nicht länger der Kontrolleur, der erreichte Lernziele abhakt, sondern wird zum Organisator und zum Forscher, der versucht, möglichst viel über die Lernprozesse der einzelner Kinder herauszufinden, um diese Kinder dann individuell fördern und fordern zu können.

#### Literatur:

Dehaene, S. (1999). *Der Zahlensinn oder warum wir rechnen können*. Basel, Boston, Berlin (Birkhäuser).

Klaudt, D. (2003). Exploring number sense - a research project in Primary School using Logo. In: Futschek, G. (ed.) *EUROLOGO 2003 be creative... Re-inventing technology on education*. Proceedings of the 9th European Logo Conference, Porto, Portugal. Coimbra (Cnotinfor), S.62-68.

Klaudt, D.; Spannagel, C. (2004). Computerunterstütztes Operieren am mentalen Zahlenstrahl. In: *Erziehung und Unterricht - Österreichische Pädagogische Zeitschrift*, Heft 3/4 2004. S. 246-257.

Klaudt, Dieter (2005): *Zahlvorstellung und Operieren am mentalen Zahlenstrahl – Eine Untersuchung im mathematischen Anfangsunterricht zu computergestützten Eigenkonstruktionen mit Hilfe einer LOGO-Umgebung*. Dissertation online veröffentlicht [http://elib.uni-stuttgart.de/opus/frontdoor.php?source\\_opus=2501](http://elib.uni-stuttgart.de/opus/frontdoor.php?source_opus=2501)

Lakoff, G.; Nunez, R.E. (2000). *Where Mathematics comes from. How the embodied Mind brings Mathematics into Being*. New York (Basic Books).