

Romualdas KASUBA, Vilnius

## **Psychologie und Tiefe des Denkens oder über Einstiegsfähigkeit bei der Lösung von Aufgaben**

Bei allen Tätigkeiten stößt man auf Schwierigkeiten, ganz gleich, welche konkreten, welche nützlichen oder sogar unersetzbaren Wirkungsfelder diese Tätigkeiten umfassen, selbst wenn sie nicht so breit sind wie in der Mathematik oder wenn Denk- und Einfühlungsvermögen nicht in gleichem Maße gefordert sind.

Mathematik gehört für manche zu den höchsten Künsten. Ohne Zweifel bietet sie – und darin sind sich alle einig, die etwas davon verstehen – schönste Betätigungs- und Entfaltungsmöglichkeiten. Doch viele wissen es ja, wie die Mathematik, einmal abgesehen von ihren konkreten Inhalten, allein von der Form her doch merkbar abstrakt ist. Schönheit und Eleganz haben eben ihren Preis und das muss man in Rechnung stellen und in Kauf nehmen.

Auch vom menschlich verständlichen psychologischen Standpunkt erscheint Mathematik zweifellos als eine der reinsten und herausforderndsten Künste. Sie wirkt wie ein Stern im klaren Nachthimmel – lockt und ist nicht zu übersehen. Unbestreitbar sind solche Umstände die wertvollsten und schon alleine deswegen lohnt es sich sehr, aus dem Wunsch, nach den Sternen greifen zu wollen, besondere Fähigkeiten möglichst intensiv zu entwickeln.

Entwicklungsmöglichkeiten sind im Falle der Mathematik in praktisch unbeschränktem Maße stets vorhanden. Es gibt in der Mathematik erstaunliche Möglichkeiten der Förderung menschlichen Einfühlungsvermögens, verbunden mit dem Wachsen der Persönlichkeit.

Doch nicht umsonst ist auch für uns alle gesagt worden: „Grau teurerer Freund, ist alle Theorie ...“ – Also zurück zu Quellen und Beispielen.

Fangen wir an mit einfachsten Beispielen, auch wenn diese beinahe kinderleicht erscheinen. Solche „kinderleichten“ Aufgaben sind wegen ihrer herausfordernden und mahnenden Einfachheit psychologisch gesehen wahrscheinlich gerade deshalb von größter Bedeutung. Einerseits, weil solche einfachen Dinge gleichzeitig auch echte Produkte der reinen Vernunft sind. Andererseits sind diese auch für viele zugänglich und jagen also den Leuten keine unnötige Angst ein. Und drittens sind die Ereignisse, die wir hier sehen, zu verstehen und zu begreifen. Sie bringen uns viele Ideen, bleiben offen für weitere Entwicklungen und sind von Interesse für viele, die sich wenigstens ein bisschen sich damit befassen wollen.

Wenn wir uns schon wirklich um Verständnis der Leute kümmern wollen, die wir eingeladen haben etwas zu unternehmen, dann sind wir auch verpflichtet, uns so zu benehmen, dass erste Erfolge bereits gut vorbereitet sind, also praktisch unvermeidbar und unauffällig eintreten. Solche Bemühungen haben größten Wert. Vergessen wir vor allem nicht, dass das Einsteigen möglichst leicht ausfallen muss, also praktisch blitzschnell und unbemerkt geschehen soll. Der psychologische Wert solcher Dinge ist, dass wir uns plötzlich engagiert fühlen, ohne praktisch bemerkt zu haben, wann und wie es geschehen ist.

Gehen wir nun, wie versprochen, zu konkreten Beispielen über.

### **Eine glänzende Miniatur belorussischer Herkunft**

Man muss nicht unbedingt tagelang mühsam überlegen, um zu begreifen, dass wir, wenn wir 4 verschiedene Zahlen nehmen und je 2 dieser Zahlen auf alle möglichen Weisen summieren, dann höchstens 6 verschiedene Summen bekommen können.

Nehmen wir zum Beispiel die vier Zahlen 1, 10, 100 und 1000. Dann sind alle möglichen Summen aus je 2 dieser Zahlen eben 11, 101, 110, 1001, 1010 und 1100.

Und jetzt erlauben wir uns, zu zwei ähnlich, ja sogar beinahe identisch aussehenden Beispielen ein und dieselbe Frage zu stellen:

Gibt es denn 4 Zahlen so, dass alle möglichen Summen aus je 2 dieser Zahlen die folgenden vorgegebenen Zahlenmengen erzeugen?

Eine Zahlenmenge ist 1, 2, 3, 4, 5, 6, die zweite ist 1, 2, 3, 4, 5, 7.

Wie der Leser bereits erwartet, ist die Antwort in diesen zwei Beispielen verschieden, – einmal ist die Antwort “Ja”, im zweiten Falle ist die Antwort “Nein”. Wenn wir den Fall der Summen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 als „regelmäßig“ bezeichnen und den zweiten Fall mit den Summen 1, 2, 3, 4, 5 und 7 „ein bisschen unregelmäßig“ nennen, dann entsteht die fast philosophische Frage, welche Zahlenmenge – die regelmäßige oder auch die unregelmäßige - größere Chancen hat, erzeugt zu werden?

Aber der regelmäßige Fall hat auch nicht immer Vorrang gegenüber dem unregelmäßigen.

Nehmen wir jetzt 5 verschiedene Zahlen und summieren wir diese wieder paarweise. Kann man 5 Zahlen finden, dass alle ihre möglichen Summen aus je zwei von ihnen die Zahlenmengen

- (A) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 bzw.
- (B) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11 erzeugen?

Auch diesmal ist erste Zahlenmenge hundertprozentig regelmäßig und die zweite wieder nicht ganz. Mit der mit Erzeugbarkeit ist es jetzt aber gerade umgekehrt.

Hans hat wieder 4 Zahlen genommen, diese wiederum paarweise summiert und 5 von 6 Summen gezeigt. Diese Summen waren 14, 16, 18, 19 und 22. Als der Vater das sah, wurde er traurig und sagte: „Da ist etwas schief gelaufen.“ Woher wusste er es?

### **Die eine Tabelle lässt sich leicht aufstellen. Warum gelingt das nicht mit einer ähnlichen, nur wenig veränderten?**

Die folgende Tabelle enthält genau drei Zeilen. In der ersten Zeile sind alle aufeinanderfolgenden Zahlen von 1 bis 9 aufgeschrieben. In der zweiten Zeile möchten wir diese Zahlen so umstellen, dass wir, wenn wir in der dritten Zeile die Differenz der Zahlen aus der ersten und der zweiten Zeile bilden, alle möglichen Zahlen von 0 bis 8 bekommen (wir ziehen immer die kleinere Zahl von der größeren ab, falls diese nicht gleich sind). Lässt sich das machen?

Die Antwort ist „Ja“, wie z. B. die folgende Tabelle ausweist.

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 9 | 8 | 7 | 1 | 5 | 4 | 6 | 3 | 2 |
| 8 | 6 | 4 | 3 | 0 | 2 | 1 | 5 | 7 |

Wir machen nun die Tabelle um eine Spalte länger. In der ersten Zeile tauchen dann alle Zahlen von 1 bis 10 auf. In der zweiten werden diese Zahlen wieder vertauscht angeschrieben, in der dritten Zeile die Differenzen der entsprechenden Zahlen aus der ersten und zweiten Zeile gebildet. Wir fragen, ob es auch jetzt möglich ist, dass als Differenzen alle ganzen Zahlen von 0 bis 9 auftauchen?

Warum geht das jetzt nicht mehr? Ist dieser Fall denn jetzt so viel schwerer? Sind die Dinge so ganz anders geworden? Wie kann man es erklären?

### **Eine riesige Schokoladentafel und die Nüsse**

Betrachten wir jetzt in einer Aufgabe den allgemeinen Fall. Adam hat eine quadratische  $n \times n$  Schokoladentafel, die üblicherweise aus  $n^2$   $1 \times 1$  Teilchen gebildet ist. Auf manche Teilchen legt Eva eine Nuss. Dann bricht Adam die Schokoladentafel in zwei rechteckige Teile.

Und jetzt kommt die recht schwierig erscheinende Frage:

Wieviel Nüsse soll Eva mindestens auf die Tafel hinlegen, damit, wenn Adam sie – egal auf welche Weise – in zwei rechteckige Teile bricht, mindestens auf einem der beiden Teile mindestens  $n$  Nüsse zu finden sind?

Uns ist klar, das ist eine Aufgabe von der Sorte, wo wir am Anfang die einfacheren, ja sogar möglichst die einfachsten Fälle betrachten sollten, falls wir die Aufgabe wirklich lösen möchten.

So gehen wir zunächst zum Fall der  $2 \times 2$  Tafel. Die Aufgabe zu vereinfachen ist nicht immer wünschenswert für den Lösenden, denn man möchte gerne alle möglichen Fälle auf einen Schuss erledigen. Aber das gelingt durchaus nicht immer sogleich, besonders wenn die Aufgabe etwas geschickter gemacht und nicht immer gleich am Anfang zu erraten ist, welchen Weg man einschlagen muss.

Das ist dann oft ein psychologisches Problem, denn es mag mir scheinen, dass ich dann, wenn ich die Aufgabe vereinfache, schlechter bin als diejenigen, für die der allgemeine Fall gedacht ist. Aber wenn ich die Aufgabe lösen will, so sollte ich solche Gedanken nicht zulassen. Ich sollte mich zunächst um konkrete einfache Beispiele kümmern, um vielleicht später die komplexe Wahrheit doch noch entdecken zu können.

Es ist ja bekannt, dass auch eine passende Aufgabe genauso wie jede wahre Tätigkeit uns lehrt zu unterscheiden, was machbar ist und was nicht – eine richtig dosierte Portion Bescheidenheit zusammen mit der Freude, die Aufgabe schließlich doch gemeistert zu haben, sind dem Lösenden also immer sicher.

In den Fällen der  $2 \times 2$ ,  $3 \times 3$  und  $4 \times 4$  Tafeln sind 3, 4 bzw. 5 Nüsse die minimalsten Anzahlen an Nüssen, die Eva auf die entsprechende Tafel legen soll. An dieser Stelle könnte man meinen, dass da eine einfache (also auch schöne) Gesetzmäßigkeit entsteht, dass für die  $n \times n$  Tafel Eva  $n + 1$  Nüsse hinlegen muss.

Doch im Fall der  $5 \times 5$  Tafel scheitern diesmal alle unsere Versuche, mit 6 Nüssen auszukommen. Warum? Und wie kann man es beweisen?

Wenn ich aber einen Beweis nicht führe, dann kann ich dem Gedanken nicht entgehen, dass ich wahrscheinlich etwas doch nicht sehe oder dass ich vielleicht nicht fähig bin, das zu beweisen, was die anderen imstande sind zu verwirklichen. Ich möchte mir jedoch Klarheit verschaffen.

Also will ich mich in diesem Fall um den Beweis als einen Weg zur endgültigen Klarstellung der Dinge bemühen.