Hans Niels JAHNKE, Essen

Beweise und Hypothesen

Beweise und empirisches Denken

Empirische Studien und Unterrichtserfahrungen zeigen, dass für viele Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I Beispiele und Messungen eine höhere Überzeugungskraft haben als ein mathematischer Beweis (z. B. Healey & Hoyles o. J.). Die Befunde bedürfen im Einzelnen einer sorgfältigen Analyse, sie belegen aber eine starke empirische Bindung des Denkens in dieser Alterstufe.

In der Literatur besteht die Tendenz, derartige Erscheinungen als „Fehlvorstellungen" einzuordnen. Sie lassen sich aber als sinnvolle Verhaltensweisen interpretieren, wenn man das Denken der Schülerinnen und Schüler mit dem von Physikern vergleicht, für die eine mathematische Deduktion ohne experimentelle Überprüfung auch nicht ausreichen würde, um ein Phänomen als existent zu akzeptieren. Daher sollte man im Unterricht nicht mit Normen für die Sicherheit mathematischen Wissens operieren, die im Widerspruch zu diesen gedanklichen Voraussetzungen stehen. Insbesondere läuft die häufige Erklärung ins Leere, Messen erfasse nur endlich viele Fälle, wenn man einen Sachverhalt für alle Objekte sichern wolle, müsse man ihn beweisen. Im Fall der Geometrie, die ja doch empirische Aussagen macht, widerspricht das auch Normen, die in den experimentellen Fächern vermittelt werden.

Ansätze zu einer genetischen Konzeption

In diesem Vortrag soll ein genetischer Zugang zum Beweisen vorgeschlagen werden, der das empirische Denken nicht beiseite zu schieben versucht, sondern es ernstnimmt und gerade dadurch die Kraft des theoretischen Denkens zeigt (Jahnke 1978). Er würde drei Phasen umfassen: 1. Phase der Gedankenexperimente (Klasse 1+), 2. Phase des hypothetisch-deduktiven Denkens (Klasse 7+), 3. Phase autonomer mathematischer Theorien.

Die 1. Phase beinhaltet die „präformalen" (Kirsch 1979), „inhaltlich-anschaulichen" (Wittmann & Müller 1988) und „erklärenden Beweise" (Hanna 1989) und ist z. B. durch die Materialien des Projekts mathe 2000 in der Grundschule und in den unteren Klassen der SI gut implementiert.

Der Begriff der Phase wird in Ermangelung eines besseren benutzt. Er soll eine erste, an den Rändern unscharfe Ordnung des Feldes ermöglichen. Phasen gehen ineinander über, insbesondere wird in einer späteren Phase nicht obsolet oder überwunden, was in einer früheren Phase im Mittelpunkt steht. Präformale oder inhaltlich-anschauliche Beweise spielen auf allen Levels des mathematischen Denkens, auch in der mathematischen Forschung, eine wichtige Rolle.

In der 2. Phase ab Klasse 7 wird der Begriff des Beweisens explizit thematisiert. Dann muss man auch von Theorien sprechen, ohne mit einer fertigen Systematik zu arbeiten. Geeignet ist Freudenthals Konzeption des „Lokalen Ordnens“, allerdings mit Modifikationen. Das Problem des Messens sollte nicht in eine allgemeine Rede von Anschaulichkeit verflüchtigt werden, sondern wenn gemessen wird, sollte es auch tatsächlich um empirische Theorien gehen. Dazu müssen Zusammenhänge geometrischer Sachverhalte aufgebaut werden, die für die Schüler überschaubar sind und in denen Deduktionen und Messungen organisch integriert sind.

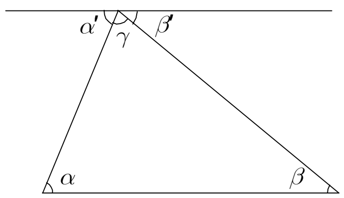
Die 3. Phase der Autonomisierung würde dem entsprechen, was man als ausgebildeter Mathematiker unter einem Beweis versteht. Ob dies in der Schule angestrebt werden sollte und überhaupt erreichbar ist, soll hier offen bleiben.

Im folgenden geht es um die 2. Phase. Immer wieder wird vorgeschlagen, dass man das Beweisen in der Mathematik mit Begründungsverfahren in anderen Disziplinen und Gebieten (von der Physik bis zur Jurisprudenz) in Zusammenhang bringen sollte. Dies wird im allgemeinen aber nur als Folie benutzt, um davon das „eigentlich mathematische Beweisen“ abzugrenzen. Statt dessen ginge es aber um Verknüpfung und Einbettung. Ein geeigneter Rahmen ist die für das wissenschaftliche Denken fundamentale Idee der *Hypothetisch – deduktiven Methode*. Durch eine Deduktion werden Konsequenzen aus einer Hypothese abgeleitet, die dann am Material überprüft werden. Diese Grundstruktur verbindet die Argumentationsweise des Physikers mit der des Soziologen, des Sprachwissenschaftlers und eben auch des Mathematikers.

Macht man damit ernst, dann tritt der klassische Begriff der Hypothese in den Mittelpunkt. Beweisen wird aufgefasst als Untersuchung von Hypothesen, die man auf ihre Konsequenzen hin befragt. Damit bringt man das Modellieren und Beweisen in einen engen Zusammenhang. Ein wichtiger Aspekt dieses Ansatzes ist es, dass die Begriffe „Beweis“ und „Hypothese“ nicht nur Konzepte der Hintergrundsphilosophie der Lehrperson sind, sondern ab Klasse 7 explizit im Unterricht benutzt und eingeübt werden.

Beispiel: Winkelsumme im Dreieck

Der Satz über die Winkelsumme im Dreieck wird in seiner Bedeutung häufig unterschätzt. Er muss aber zu den „tiefen“ Sätzen der Schulmathematik gerechnet werden. Er ist nicht offensichtlich, fundamental für die Geometrie und steht paradigmatisch für die größte erkenntnistheoretische Revolution in der Geschichte der Mathematik. Es lohnt sich, ihn im Unterricht zu „inszenieren“.

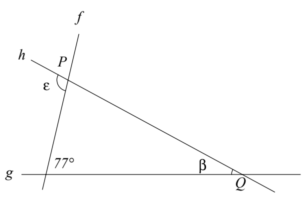


Zu Recht wird in fast allen Schulbüchern der in der Figur angedeutete Beweis mitgeteilt. Er führt den Satz auf die Gleichheit von Wechselwinkeln an geschnittenen Parallelen zurück. Letzterer Sachverhalt wird meist abbildungsgeometrisch ‚bewiesen', und zwar in einer Weise, dass ‚Widerspruch unmöglich' ist. Offenbar soll den Schülern der Eindruck vermittelt werden, dass durch einen mathematischen Beweis ein besonders hohes Maß an Gewissheit erreichbar ist. Nach dem oben Gesagten, muss das als kontraproduktiv betrachtet werden.

Die Kernidee des im folgenden skizzierten Vorschlags besteht darin, den Wechselwinkelsatz nicht als einen bewiesenen Satz (woraus?) zu präsentieren, sondern als eine „empirisch fundierte Hypothese“ und damit die empirische Gültigkeit der euklidischen Geometrie zu thematisieren.

Schritt 1: Arbeitsauftrag
Die Gerade *h* dreht sich gegen den Uhrzeigersinn um *P*. Miss für einige Positionen von *h* die Winkel β und ε und stelle die Ergebnisse in einer Tabelle zusammen. Notiere Deine Beobachtungen.

Die Schüler beobachten: *Q* wandert immer weiter nach außen. ε und β werden immer kleiner. β ist gleich der Abweichung des Winkels ε von 77°. Es gibt mindestens eine Position von *h* (Q ganz weit außen im „Unendlichen“), bei der $\varepsilon = 77°$. *h* und *g* werden sich in dieser Position nicht schneiden. Es ist plausibel, dass die Eigenschaft von β, die Abweichung des ε von 77° zu messen, auch im Unendlichen gilt, also β = 0. Das können wir aber nicht überprüfen. Das legt den Wechselwinkelsatz als empirische Hypothese nahe.



Schritt 2: Aus dem Wechselwinkelsatz lässt sich der Winkelsummensatz herleiten. Wir prüfen ihn durch Messung nach. Die Messung nehmen wird ernst, d. h. wir arbeiten mit großen, sorgfältig gezeichneten Dreiecken und notieren alle Messergebnisse, aus denen wir den Durchschnitt berechnen. Wir haben nun zwei Werte für die Winkelsumme, den aus der Hypothese deduzierten und den von den Schülern gemessenen Wert.

Schritt 3: Die Schüler erforschen durch Messen und Schlussfolgern das Feld aller (einfachen) Polygone. Das ist für sich eine spannende Aktivität.

Am Schluss steht der deduktive Beweis, dass die Winkelsummen der Polygone von der Winkelsumme des Dreiecks abhängen. Die Abhängigkeiten der verschiedenen Aussagen werden in einem Baum visualisiert, um den Einfluss der Hypothese des Wechselwinkelsatzes zu verdeutlichen.

Schritt 4: Es wird die Winkelsumme eines 10-Ecks prognostiziert, einmal mit dem Wert 180°, zum anderen mit dem unter Schritt 1 gewonnenen Messwert für die Winkelsumme des Dreiecks. I. A. wird das zu dem Ergebnis führen, dass der Messwert als wahrer Wert nicht haltbar ist. Dennoch ist damit der Wert 180° nicht endgültig bestätigt, sondern bleibt eine Hypothese.

Schritt 5: Es wird eine Information zur Geschichte des Parallelenaxioms und der Versuche, es durch Messen der Winkelsumme des Dreiecks zu verifizieren, gelesen und besprochen.

Durch Unterrichtsreihen, die die ganze SI begleiten (s. Beitrag von M. Kleinheinrich zur Anomalie der Sonnenbahn), sollte die Abhängigkeit zwischen Aussagen und Hypothesen immer wieder thematisiert werden. Letztlich sollte das zu einem fächerübergreifenden Modul „Wissenschaftliches Argumentieren“ führen. In diesen wäre das mathematische Beweisen sinnvoll integriert.

Literatur

Hanna, G. (1989). Proofs that prove and proofs that explain. In: *Proceedings of the Thirteenth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. II, pp. 45-51). Paris: PME.

Healy, L., & Hoyles, C. (o. J.). Curriculum Change and Geometrical Reasoning. In P. Boero (Ed.), *Theorems in School* (pp. to be published). Dordrecht: Kluwer.

Jahnke, H. N. (1978). *Zum Verhältnis von Wissensentwicklung und Begründung in der Mathematik - Beweisen als didaktisches Problem*. Bielefeld: Universität Bielefeld.

Kirsch, A. (1979). Beispiele für prämathematische Beweise. In W. Dörfler & R. Fischer (eds.), *Beweisen im Mathematikunterricht* (pp. 261-274). Klagenfurt.

Wittmann, E. C., & Müller, G. (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis. In P. Bender (ed.), *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter* (pp. 237-257). Berlin: Cornelsen.