Christine HÖRNSCHEMEYER, Rahden

Ein frühzeitiger Zugang zum Variablenbegriff in der Jahrgangsstufe 5

1. Einleitung

Die Einführung des Variablenbegriffs ist eine unverzichtbare, aber auch schwierige Aufgabe im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. Besonderes Augenmerk ist darauf zu richten, dass in den Köpfen der Schülerinnen und Schüler adäquate Vorstellungen konstruiert werden. Die Benutzung geeigneter Lernumgebungen spielt dabei eine wichtige Rolle. Wie vielfältig trotzdem noch Fehlvorstellungen vom Variablenbegriff in den Köpfen von Gymnasiasten sind, dokumentiert Kaune (2005).

Es wird über ein Unterrichtsprojekt aus Rahden berichtet, in dem Fünftklässler in ihren ersten Wochen am Gymnasium einen spielerischen und handlungsorientierten Zugang zu Algorithmen und zum Variablenbegriff erwerben können. Durch geeignete didaktische Materialien wird ein mentales Modell von Variablen und Funktionen erzeugt, das auch ein besseres Verständnis grundlegender Rechengesetze ermöglicht. Dadurch, dass die zugrundeliegenden mathematischen Ideen durch handgreifliche Verfahren und mechanisch funktionierende Maschinen repräsentiert sind, wird schon in diesem Alter eine präzise Debatte über Formalisierung von Wissen ermöglicht. Dies eröffnet Chancen für eine diskursive Unterrichtskultur.

2. Konzeption der Unterrichtsreihe

Die Unterrichtsreihe beruht auf einer weiter reichenden Konzeption, die für die Klasse 7 des Gymnasiums entwickelt wurde und außer dem Variablenbegriff vor allem den Funktionsbegriff aufbaut (Cohors, Kaune, Griep 1995a,b). Der Beginn orientiert sich an dem Textbuch für Schüler, das mittlerweile in der 5. Auflage vorliegt. Die Kinder entwickeln und analysieren zunächst in drei Mikrowelten Algorithmen (Hantieren mit Stäbchen an einer *Registerkiste*, Rechennetze, gebaut mit dem Baukasten *Dynamische Labyrinthe*, Programm für die *Registermaschine*). Welche kognitiven Mechanismen im Wechselspiel mit den drei unterschiedlichen Repräsentationsformen wirken, ist bei Schwank (1993) ausführlich analysiert worden.

Die Analyse von Algorithmen erfolgt zunächst anhand konkreter Zahlenbeispiele. Aber es wird den Schülern schnell intuitiv klar, dass die Befehlsfolge zum Hantieren mit Stäbchen an einer Registerkiste, das Rechennetz und auch das Registermaschinenprogramm unabhängig von den konkreten

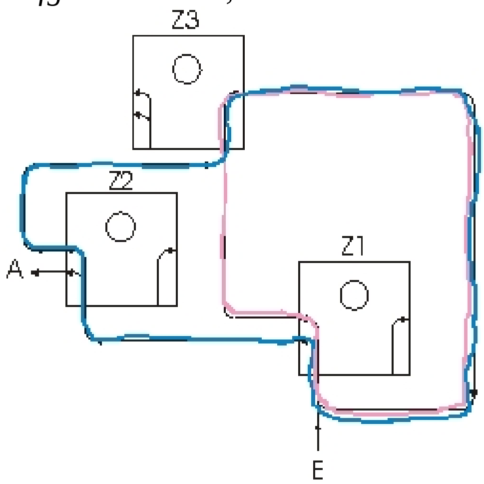
Eingabewerten funktionieren müssen. Dies ist eine geeignete Ausgangslage zur Einführung von Variablen.

3. Abstraktionsprozess: von konkreten Registerinhalten zu Variablen

Im Folgenden wird dargestellt, was Schülerinnen und Schüler im Unterricht des laufenden Schuljahrs schrittweise vorgeschlagen haben und welche methodischen Maßnahmen zur Unterstützung ihrer Denkprozesse dienen. Diese Schritte sind Stufen eines Abstraktionsprozesses zu Variablen.

Als Ausgangslage wird eine umgangssprachliche Beschreibung der Funktionsweise einer Maschine genutzt. Die verbale Beschreibung ist recht umfangreich und aufwändig, so dass die Lernenden die Tupelschreibweise und Verwendung von Variablen als willkommene Abkürzung empfinden.

Aufgabe: Erkläre, was die Maschine tut.



Lösung:

Erst wird in der rosa Schleife alles von Zähler 1 nach Zähler 3 gebracht.
Dann wird in der blauen Schleife alles von Zähler 2 nach Zähler 3 gebracht.
Am Ende steht in Zähler 3 die Summe der Zahlen, die anfangs in Zähler 1 und Zähler 2 standen.

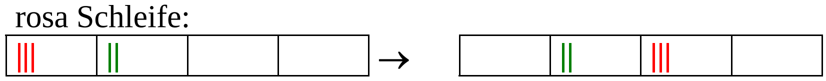
1. Vorschlag:	rosa Schleife:	Z1 → Z3
	blaue Schleife:	Z2 → Z3
	Ergebnis:	Z1 + Z2 in Z3

Dieser Vorschlag löst sich von der grafischen Darstellung. Es bleibt das Problem, dass Inhalt und Speicherplatz (Zähler) nicht unterschieden werden. Dieses löst der

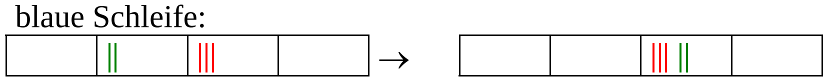
2. Vorschlag:	rosa Schleife:	Inhalt von Z1 → Z3
	blaue Schleife:	Inhalt von Z2 → Z3
	Ergebnis:	Inhalt von Z1 + Inhalt von Z2 in Z3

Diese Beschreibung enthält nach Meinung der Schülerinnen und Schüler noch zu viel Text. Sie schlagen eine vereinfachte Darstellung der Registerkiste mit Strichen für konkrete Zahlen vor.

3. Vorschlag: rosa Schleife:

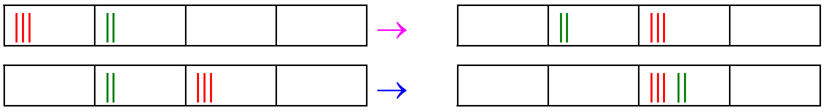


blaue Schleife:



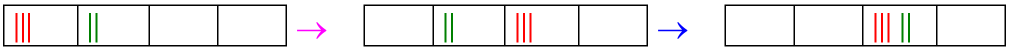
Ein entscheidender Schritt besteht jetzt darin, dass der verbliebende Text in den farbigen Pfeilen symbolisiert wird:

4. Vorschlag:



Das Weiterrechnen wird dann als Verkettung dargestellt.

5. Vorschlag:



Anschließend wird die Klappfolie, wie von Schwank (1993, S. 25) beschrieben und in Cohors-Fresenborg, Kaune & Griep (1995b, S. 33ff) methodisch ausgearbeitet, eingesetzt. Das führt zu folgendem Vorschlag:

$$(3 , 2 , 0 , 0) \rightarrow (0 , 2 , 3 , 0) \rightarrow (0 , 0 , 3 + 2 , 0)$$

Eine Überprüfung der Korrektheit der Darstellung am Ursprungstext macht deutlich, dass darin nicht von konkreten Registerinhalten die Rede war. Das führt nun zur Einführung von Variablen für die Registerinhalte. Deutlich wird das Wechselspiel zwischen Darstellungen und Vorstellungen:

Vorschläge:

$$(? , ?, 0 , 0) \rightarrow (0 , ? , ? , 0) \rightarrow (0 , 0 , ? + ? , 0)$$

$$(x , x , 0 , 0) \rightarrow (0 , x , x , 0) \rightarrow (0 , 0 , x + x , 0)$$

$$(x , x , 0 , 0) \rightarrow (0 , x , x , 0) \rightarrow (0 , 0 , x + x , 0)$$

$$(e , z , 0 , 0) \rightarrow (0 , z , e , 0) \rightarrow (0 , 0 , e + z , 0)$$

$$\left(\overset{1}{x} , \overset{2}{x} , 0 , 0\right) \rightarrow \left(0 , \overset{2}{x} , \overset{1}{x} , 0\right) \rightarrow \left(0 , 0 , \overset{1}{x} + \overset{2}{x} , 0\right)$$

Die erste Zeile greift die Metapher von „Unbekannten“ auf. Für die zweite Zeile waren die Lernenden der Meinung, Mathematiker schrieben für so etwas ein „x“. Das Weglassen von Farben in der dritten Zeile macht deutlich, dass in den ersten beiden Zeilen unbemerkt noch etwas symbolisiert war. Die vierte Zeile löst das Problem vorsichtshalber „doppelt“: durch farbige Buchstaben, wobei „**e**“ für „erstes Register“ und „**z**“ für „zweites Register“ steht. In der fünften Zeile werden die Ideen aus der dritten und vierten Zeile kombiniert. Von hier ist es nur noch ein kleiner Schritt zu

$$(x_1 , x_2 , 0 , 0) \rightarrow (0 , x_2 , x_1 , 0) \rightarrow (0 , 0 , x_1 + x_2 , 0)$$

Die Analyse von Algorithmen in den drei Mikrowelten mit Hilfe der Tupelschreibweise und damit der Umgang mit Variablen wird nun in vielfältiger Weise geübt. Anschließend entwickeln und analysieren die Schüler und Schülerinnen immer komplexere Algorithmen, z.B. für folgende Funktionen, die der Vorbereitung des Distributivgesetzes dienen:

$(x_1) \rightarrow (2\, x_1)$, $(x_1 , x_2) \rightarrow (2(x_1 + x_2))$, $(x_1 , x_2) \rightarrow (x_1 \cdot 2 + x_2 \cdot 2)$

4. Der Einfluss des Konzeptes auf Motivation und Unterrichtskultur

Es hat sich erwiesen, dass die Unterrichtsreihe sehr motivierend für die Schülerinnen und Schüler ist, denn

- alle fangen mit den gleichen Voraussetzungen an;
- die Unterrichtsreihe erfüllt die Erwartungen, dass am Gymnasium etwas ganz Neues und Anspruchsvolles beginnt;
- die Rollenspiele an der Registerkiste, die Arbeit mit den Baukästen und die Arbeit an der Registermaschine sind sehr beliebt.

Außerdem prägt die Unterrichtsreihe auf ganz entscheidende Weise die Unterrichtskultur gleich zu Beginn der Jahrgangsstufe 5. Kaune (2001, S. 15-21) hat sowohl dargestellt, wie die hier vorgestellten Mikrowelten zum Aufbau eines Funktions- und Variablenverständnisses beitragen, als auch die mit ihnen verbundenen Möglichkeiten zur Einübung einer diskursiven Unterrichtskultur. Nach den Unterrichtserfahrungen aus Rahden unterstützt die Konzeption:

- dass die Lernenden relativ komplexe Prozesse analysieren und dabei verschiedene Analysetechniken erlernen: Arbeit mit Skizzen und farbigen Stiften (Kennzeichnen, Strukturieren), verbales Analysieren und Anwendung der Funktionsschreibweise;
- die Einsicht, dass es unabhängig vom Lehrer ist, ob eine Handlungsanweisung funktioniert, sondern allein abhängig ist von der Syntax und der Semantik;
- dass die Objektebene verlassen wird, und auch auf der Metaebene diskutiert wird;
- dass die Schüler sich auf die Lösungen und Denkweisen ihrer Mitschüler einlassen;
- dass die Lernenden argumentieren, begründen lernen;
- dass die Lernenden begreifen, dass Fehlersuche ein wichtiger Denkprozess ist.

Damit wird in einer für die Schülerinnen und Schüler sehr motivierenden Spielwelt der Grundstein für die Herausbildung wichtiger Kompetenzen im Mathematikunterricht gelegt.

6. Literatur

Cohors-Fresenborg, E., Kaune, C. & Griep, M. (1995a): Einführung in die Computerwelt mit Registermaschinen. Textbuch für Schüler. (5. überarbeitete Auflage). Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Cohors-Fresenborg, E., Kaune, C. & Griep, M. (1995b): Einführung in die Computerwelt mit Registermaschinen. Handbuch für Lehrer. (4. überarbeitete Auflage). Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Kaune, C. (2001): Merkmale eines konstruktivistischen Unterrichtsskripts und eine Analyse dazugehöriger Lehr- und Lernprozesse. *Der Mathematikunterricht*, 47(1), 14-34.

Kaune, C. (2005): Acht Jahre MUMAS - Eine Recherche in 1000 Unterrichtsszenen zum Variablenverständnis von Gymnasiasten. In Kaune, C., Schwank, I. & Sjuts, J. (Hg.): Mathematikdidaktik im Wissenschaftsgefüge. Zum Verstehen und Unterrichten mathematischen Denkens, 131-151. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Schwank, I. (1993): Verschiedene Repräsentationen algorithmischer Begriffe und der Aufbau mentaler Modelle. *Der Mathematikunterricht*, 39(3), 12-26.