

Thilo HÖFER, Schwäbisch Gmünd

Funktionales Denken ganzheitlich fördern

Der Begriff der *Funktion* kann mit Hilfe eines Satzes definiert werden. Aber selbst wenn man die Definition kennt, heißt das nicht, dass man die weit reichenden Gebiete des Funktionsbegriffs erkennt (bzw. wirklich erfasst). Diese Weitläufigkeit des Begriffes macht es notwendig, innerhalb eines Forschungsbeitrages den eigenen Standpunkt aufzuzeigen. Dazu wird im Folgenden zunächst einen kurzer Überblick über das Forschungsumfeld gegeben. Dann wird ein Modell für die Sekundarstufe (I und II) entwickelt wird, mit dessen Hilfe sich die Förderung des funktionalen Denkens gezielter planen und analysieren lässt.

Dazu muss man zuerst einmal klären, was man unter dem Begriff des *funktionalen Denkens* eigentlich versteht. Eine formale Definition des Begriffes gibt es nicht. Der vorliegende Beitrag schließt sich der Beschreibung Vollraths (1989, S.6) an: „Funktionales Denken ist eine Denkweise, die typisch für den Umgang von Funktionen ist“. Funktionales Denken beschränkt sich nicht auf den Funktionsbegriff oder auf einzelne Funktionsklassen, die in der Schule gelehrt werden. Eine Schülerin¹ bzw. ein Schüler denkt funktional, wenn sie/er seine Fähigkeiten aus dem *Umfeld* der Funktionen zur Lösung eines gestellten Problems einsetzt.

Mit dieser Beschreibung kann man schon einmal einschätzen, ob eine Person funktional denkt (bzw. *denken kann*). Ebenso gibt sie einen ersten Anhaltspunkt dafür, ob eine Aufgabe funktionales Denken fordert (und fördert). Sie ist allerdings noch viel zu grob, um sie als Analyseinstrument einzusetzen, es bedarf also einer Verfeinerung für den Einsatz in der (Forschungs-)Praxis. Auch dazu findet man Modellvorschläge, von denen ich zwei Typen näher vorstellen möchte.

Vorhandene Modelle

Vollrath (1989, S.9-16) unterscheidet die Betrachtung einer Funktion in drei verschiedene Sichtweisen: Aus der *waagerechten Sichtweise* nimmt man die Funktion als punktweise Zuordnung wahr, die *dynamische Sichtweise* betrachtet die Funktion als dynamischen Prozess und die Funktion als eigenständiges Objekt erkennt man aus der *Sichtweise der Funktion als Ganzes*. Eine ähnliche Begriffsbildung für die beiden erstgenannten Sichtweisen findet man bei Malle (2000, S.8).

DeMarois und Tall (1996) gehen noch einen Schritt weiter, indem sie das Arbeiten mit Funktionen in fünf Stufen/Ebenen („Layers“) unterteilen, dar-

¹ Im weiteren Verlauf wird nur noch von Schülern gesprochen, gemeint sind hierbei stets auch Schülerinnen, usw.

unter drei die sie auf der Sekundarstufe ansiedeln: *action layer* (entspricht der waagerechten Sichtweise Vollraths), *process layer* (dynamische Sichtweise) und *object layer* (Funktion als Ganzes). *Pre-action layer* (Einsatz von funktionalen Zusammenhängen auf Grundschulniveau) und *process layer* (Fähigkeit zum beliebigen Wechseln zwischen process layer und object layer auf Hochschulniveau) komplettieren die fünf Ebenen.

Ein anderer Zugang zur Beschreibung funktionalen Denkens ergibt sich, wenn man die Darstellung der Funktion innerhalb einer Aufgabe betrachtet. Dabei fällt auf, dass in den meisten Aufgaben ein Übergang zu einer anderen als der in der Aufgabe gegebenen Funktionsdarstellung benötigt wird. Die häufigsten Darstellungen von Funktionen in Aufgaben sind die einer Funktion als Tabelle, Graph, algebraischer Ausdruck (Term) oder die einer bildlich bzw. verbal beschriebenen Funktion. Daraus ergeben sich zwölf mögliche Übergänge zwischen den Funktionsdarstellungen, die sich in einer Matrix nach Swan (1982) zusammenstellen lassen.

Modellentwicklung

Die drei Sichtweisen aus dem erstgenannten Modelltyp differenzieren den Begriff des funktionalen Denkens in sich. Es kann beispielsweise sein, dass eine Person Probleme funktional lösen kann, solange diese sich aus der waagerechten Sichtweise lösen lassen, aber scheitert, wenn die dynamische Sichtweise benötigt wird. Die Übersetzungskompetenzen nach Swan charakterisieren dagegen das funktionale Denken durch die Fähigkeit, Darstellungsübergänge vollziehen zu können.

Viele Forschungsarbeiten bieten Ansätze, wie man das funktionale Denken von Schülerinnen und Schülern verbessern kann². Als Resultat dieser Arbeiten kann ein Lehrer heutzutage aus einer Vielzahl guter Unterrichtssequenzen auswählen, mit deren Hilfe das funktionale Denken gefördert wird. Die Lernerfolge dieser Sequenzen wurden dabei häufig innerhalb eines der beiden genannten Modelltypen begründet. Wie eingangs schon erwähnt wurde, wird es jedoch keine einzelne Unterrichtsidee erreichen können, das funktionale Denken in all seinen Facetten zu schulen. Es fehlt der Lehrkraft daher eine Möglichkeit zur Eingliederung all dieser Ideen in ein Gesamtkonzept, so dass sie eine sinnvolle Auswahl für ihren Unterricht treffen kann, um das funktionale Denken möglichst vielseitig zu fördern. Das im Folgenden vorgestellte Modell soll einerseits helfen, einzelne Unterrichtssequenzen und Übungsaufgaben innerhalb eines Gesamtkonzeptes einzuordnen. Dadurch kann sichergestellt werden, dass die einzelnen Teile keine ungewollten Doppelungen darstellen, aufgrund derer

² Z.B. innermathematisch in Geometrie (z.B. Ludwig 2004), mit dem Computer (z.B. Müller-Phillipp 2000), fächerübergreifend zum Fach Physik (z.B. Beckmann 2003, Michelsen 2001)

dann die Zeit für das Unterrichten anderer Aspekte des funktionalen Denkens fehlt. Andererseits kann es auch zur Standpunktermittlung dienen, beispielsweise mit dem Ziel, Schüler auf ihrem Stand „abzuholen“.

Die Idee des Modells ist es, die Modelle von Vollrath/Malle/DeMarois & Tall einerseits und Swan andererseits zu kombinieren. Die Darstellungsübergänge sind ein zentraler Punkt der meisten Aufgaben, die funktional gelöst werden sollen. Man kann jedoch solche Aufgaben auf verschiedensten Schwierigkeitsgraden entwickeln. Beispielsweise stellt die Aufgabe „Bestimme einige Punkte des Schaubildes der Funktion f mit $f(x)=x^2$ im Bereich $-3 \leq x \leq 3$ und zeichne sie in ein Koordinatensystem“ einen Übergang von algebraischer in graphische Darstellung dar, der eine statische Betrachtungsweise abverlangt. Den gleichen Übergangstyp benötigt man auch bei der Fragestellung „Du sollst das Schaubild von f zeichnen. Überlege dazu zunächst, wie viele Punkte das Schaubild eindeutig festlegen. Bestimme genau so viele Punkte und zeichne dann das Schaubild ein.“. Hier muss der Schüler die Entwicklung des Schaubildes bei Veränderung des x -Wertes im Blick haben, also eine dynamische Sicht der Funktion. Aus diesem Beispiel erkennt man, dass die einzelnen Übergänge auch noch auf verschiedenen Ebenen betrachtet werden müssen, die durch die oben genannten Bezeichnungen³ beschrieben werden. Die Übergangsmatrix von Swan erweitert sich so in die dritte Dimension, es entsteht das folgende Modell, welches im weiteren Verlauf das *Haus des funktionalen Denkens* (Abb.1) genannt wird.

Die einzelnen Quader in diesem Modell stehen somit jeweils für das Erreichen eines „Bausteins“ in der Ganzheit des funktionalen Denkens. Je mehr Quader durch eine Person besetzt werden können, umso eher wird sie ein Problem mithilfe dieser Fähigkeiten lösen können und umso stärker ist somit ihr funktionales Denken ausgeprägt.

Einsatzmöglichkeiten des Modells

Wenn man komplexe Aufgabenstellungen mithilfe des Haus des funktionalen Denkens analysiert, so wird man feststellen, dass einerseits mehrere Modellbausteine gleichzeitig angesprochen werden können und andererseits die Lösungswege verschiedener Schüler verschiedene Bausteine beanspruchen können.

Wenn also bei einer Person das Haus des funktionalen Denkens voll besetzt ist, heißt dies nicht automatisch, dass die Person auch tatsächlich alle (funktionalen) Problemstellungen lösen kann, da das Zusammenspiel der einzelnen Komponenten nicht durch das Modell abgebildet wird.

3 In Sekundarstufe I und II: Aktionsebene, Prozessebene, Objektebene

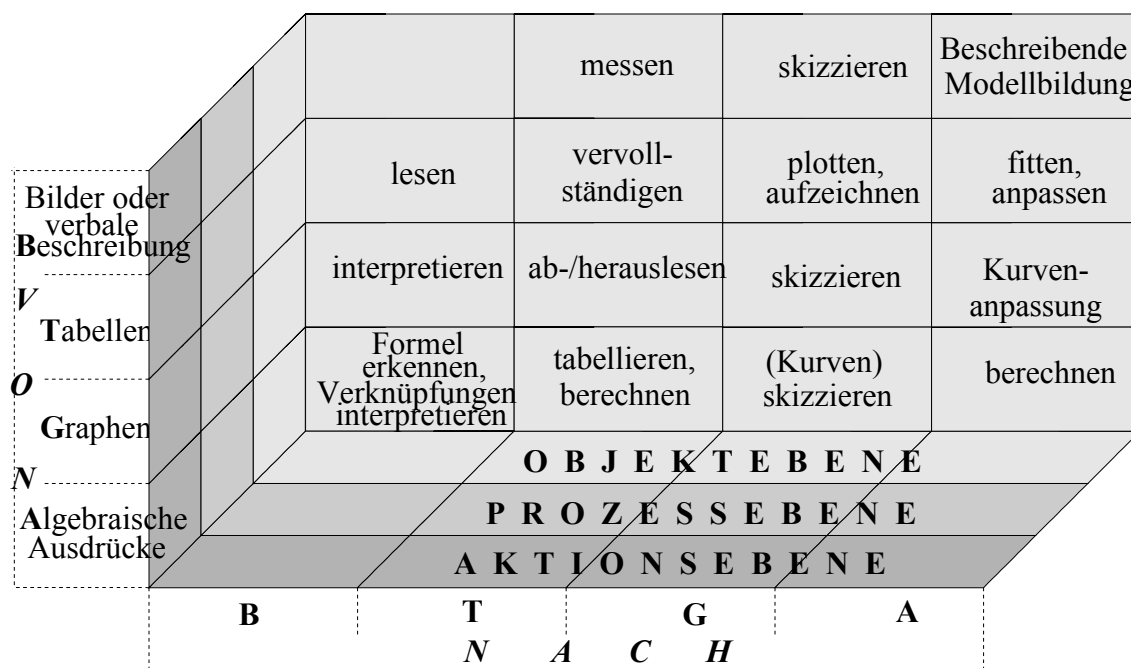


Abb.1: Das Haus des funktionalen Denkens

Andererseits wird eine Person, die auch nur eine der in einer komplexen Aufgabe zwingend benötigten Übergangsfähigkeiten nicht besitzt, diese nicht lösen können. Die Bausteine des Modells können somit als Grundbausteine zum funktionalen Denken aufgefasst werden. Daraus lässt sich erkennen, dass das Haus des funktionalen Denkens nicht als Lernmodell aufgefasst werden kann und darf. Vielmehr ist es ein *grundlegendes* Analyseraster, das sich in der Unterrichtsplanung, der Unterrichtsauswertung sowie in der Analyse von Schülerfähigkeiten hilfreich einsetzen lässt.

Literatur:

- Beckmann, A.: Fächerübergreifender Unterricht, Teil 2 (Physik). Franzbecker Verlag, Berlin 2003.
- DeMarois, P.; Tall, D.: Facets and Layers of the Function Concept. In: Proceedings of PME 20, 2, S.297–304, Valencia 1996.
- Ludwig, M.: Raumkurven und Schnittflächen – ein Plädoyer für funktionales Denken auch in der Raumgeometrie. In: MU 50 (6), S.16–22, 2004
- Malle, G.: Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. In: mathematik lehren 103 (Funktionen), 2000, S.8–11
- Michelsen, C.: Begrebsdannelse med domaeneudvidelse. Syddansk universitet, Danmark 2001.
- Müller-Philipp, S.: Der Funktionsbegriff im Mathematikunterricht. Waxmann-Verlag, Münster 2000.
- Vollrath, H.-J.: Funktionales Denken. In: Journal der Mathematikdidaktik 10, S.3–37, 1989.
- Swan, M.: The teaching of functions and graphs. In: Conference on functions, 1–5, S.151–165, Enschede 1982.