Kirsten HECKMANN, Universität Bielefeld

Zehntel, Hundertstel und andere Unbekannte – zum Stellenwertverständnis von Sechstklässlern

Nach einer intensiven Behandlung der gemeinen Brüche in der Klasse 6 werden die Dezimalbrüche am Ende des Schuljahres in der Regel recht kurz thematisiert. Dies ist wohl unter anderem durch die Annahme bedingt, Dezimalbrüche seien aufgrund ihrer Nähe zu den natürlichen Zahlen leicht verständlich. Meine empirische Untersuchung zeigt jedoch, dass die Fortsetzung des Stellenwertprinzips über das Komma hinweg für die Schülerinnen und Schüler alles andere als selbstverständlich ist. Anstelle des Prinzips der fortgesetzten Division durch 10 stehen für sie andere (hauptsächlich sprachliche) Aspekte im Vordergrund, die fehlerhafte Übertragungen zur Folge haben.

1 Die Untersuchung

Um Aufschluss über das Dezimalbruchverständnis von Schülern und seine Entwicklung zu bekommen, wurden ca. 160 Realschüler aus sechs Klassen im Laufe des sechsten Schuljahres zu drei Zeitpunkten getestet. Zum ersten Mal (T1) wurden die Schüler am Anfang des Schuljahres, und somit vor Beginn der gesamten Bruchrechnung, getestet; der zweite Testzeitpunkt (T2) gegen Mitte des Schuljahres fiel in die Zeit der Behandlung der gemeinen Brüche. Während zu diesen beiden Testzeitpunkten die Vorkenntnisse zu Dezimalbrüchen erhoben wurden, wurde schließlich zum Testzeitpunkt (T3) am Ende des Schuljahres der Unterrichtserfolg gemessen, da die Dezimalbruchrechnung mittlerweile in allen Klassen (fast) abgeschlossen war.

Die Untersuchung bestand aus zwei Versionen eines schriftlichen Tests zu verschiedenen Bereichen der Dezimalbruchrechnung, die jeweils von etwa der Hälfte der Stichprobe bearbeitet wurden. Für eine bessere Einsicht in die zu Grunde liegenden Lösungsstrategien und Denkweisen wurden zusätzlich Einzelinterviews mit ausgewählten Schülern durchgeführt.

Im Folgenden werden einige Ergebnisse speziell aus dem Bereich des Stellenwertverständnisses vorgestellt.

2 Allgemeine Untersuchungsergebnisse

Bei einer Testaufgabe zur Kenntnis der Stellenwertanordnung (S1a) sollten die Zehntel in der Zahl 7,654 angekreuzt werden. Die extrem geringen Lösungsquoten von 10 % *vor* der Dezimalbruchrechnung sowie der sehr hohe Anteil an Auslassungen („-/-“) von 38 % bzw. 21 % (vgl. Tab. 1) sind zwar zu dieser Zeit noch nicht Besorgnis erregend, lassen aber erkennen, dass die meisten Schüler zu einer Erweiterung des Stellenwertprinzips von selbst offenbar nicht in der Lage sind. Erschreckend ist hingegen die geringe Quote richtiger Lösungen von nur 53 % *nach* der Dezimalbruchrechnung (T3). Nahezu identische Fehler- bzw. Lösungsquoten lassen sich auch im Aufgabenteil b) beim Identifizieren der Hundertstel in derselben Zahl (7,654) verzeichnen. Ein vergleichbares Bild zeigt sich darüber hinaus in einer weiteren Testaufgabe (S2), bei der die Schüler umgekehrt 5 Hundertstel als „Kommazahl" schreiben sollen (vgl. Tab. 2). Zusammenfassend legen diese Ergebnisse die Vermutung nahe, dass das Verständnis für die Stellenwerte im Unterricht als selbstverständlich vorausgesetzt und daher im Unterricht vernachlässigt wird. Den Antworten zufolge scheinen jedoch viele Schüler andere (fehlerhafte) Vorstellungen von den Stellenwerten nach dem Komma zu besitzen, die im Folgenden näher betrachtet werden.

S1a	**6**	**5**	**5 und 4**	**Sonst.**	**-/-**
T1 (N = 81)	10 %	31 %	5 %	16 %	38 %
T2 (N = 80)	10 %	58 %	3 %	9 %	21 %
T3 (N = 78)	53 %	36 %	1 %	4 %	6 %

Tab. 1: Schülerantworten zur Identifikation der Zehntel in 7,654

S2	**0,05**	**0,500**	**5,00**	**5,100**	**0,005**	**Sonst.**	**-/-**
T1 (N = 84)	11 %	20 %	21 %	1 %	2 %	13 %	31 %
T2 (N = 80)	15 %	10 %	15 %	31 %	3 %	9 %	18 %
T3 (N = 83)	53 %	11 %	13 %	10 %	4 %	0 %	10 %

Tab. 2: Schülerantworten zum Schreiben von 5 Hundertsteln als „Kommazahl"

3 Fehlerhafte Vorstellungen von den Stellenwerten

Sowohl dem schriftlichen Test als auch den Interviews zufolge scheint eine Vorstellung dominant vorzuherrschen, bei der die Schüler – offenbar bedingt durch die sprachliche Verwandtschaft der Stellenwertbezeichnungen – von einer Entsprechung zwischen Zehnern und Zehnteln bzw. Hundertern und Hundertsteln ausgehen und demgemäß Eigenschaften der bekannten Stellenwerte fehlerhaft übertragen. Klar erkennbar ist dies z. B. bei Alicia (T3), die bei Aufgabe S1 die Zahl hinter dem Komma (654) als natürliche Zahl auffasst und die Stellenwerte einfach umbenennt: „Zehner, also Zehntel" … „Hundert, Hundertstel". Diese Vorstellung erklärt vermutlich einen großen Anteil der zugehörigen Antwort „5". Die gleiche Ursache liegt wohl auch der Antwort „5 und 4" zu Grunde mit dem Unterschied, dass die betreffenden Schüler hier offensichtlich die gesamte Zahl ab den Zehnern im Blick haben.

Bei Aufgabe S2 liefert die beschriebene Fehlvorstellung eine wichtige Erklärung für die ersten beiden Fehlerkategorien (Tab. 2). So überträgt z. B. Sebastian (T1) speziell die Eigenschaft der Stellenanzahl auf die neuen Stellenwerte: „Und da fünf Hunderts… also Hundertstel sind ja also drei Stellen und dann fünf davon sind fünfhundert…“ Während Sebastian – vermutlich um die Hunderter in Hundertstel zu verwandeln – eine Null und ein Komma hiervor setzt („0,500“), trennen andere Schüler wohl mit der gleichen Intention die erste Stelle durch ein Komma ab („5,00“). Interessant ist, dass in beiden Fällen einige Schüler die Zahlen in der Kenntnis entsprechender Regeln weiter kürzen, ohne die Widersprüchlichkeit zu der angewendeten Strategie zu erkennen. In den Interviews stellt sich allerdings noch eine weitere Fehlvorstellung heraus, die speziell zu der zweiten Antwort („5,00“) führt, und die darin besteht, dass Schüler von einer festen Stellenwertanordnung ausgehen, bei der Hundertstel vor dem Komma stehen und nach dem Komma von Zehnteln und Einern (bzw. „Einteln“) gefolgt werden. Ein weiteres Interview liefert einen Hinweis darauf, dass es sich hierbei anscheinend um eine fehlerhafte Übergeneralisierung aus bekannten Größenbereichen handelt, denn 3,25 m, aufgefasst als 325 cm, besteht aus 3 Hunderter-Zentimetern („Hundertstel“), 2 Zehner-Zentimetern („Zehntel“) und 5 Einer-Zentimetern. Eine Generalisierung aus anderen Größenbereichen könnte entsprechend die feste Stellenwertanordnung t,hze erklären, die ebenfalls vereinzelt zu beobachten ist. Des Weiteren ist bei Aufgabe S2 eine weitere Fehlerstrategie zu beobachten, die als Gleichsetzung von Komma und Bruchstrich beschrieben werden kann, und erwartungsgemäß zur Zeit der Behandlung der gemeinen Brüche (T2) verstärkt auftritt.

Diverse weitere Fehlvorstellungen, wie sie sich insbesondere vor der Dezimalbruchrechnung häufiger beobachten lassen, spielen in dieser Studie jede für sich nur eine untergeordnete Rolle. Dies gilt u. a. auch für die bekannte Vorstellung, bei der die betreffenden Schüler in Annahme einer Symmetrie durch das Komma die erste Nachkommastelle als „Eintel“ auffassen. Während dies bei Aufgabe S1a nicht von der erstgenannten Fehlvorstellung unterscheidbar ist, weisen die geringen Quoten der zugehörigen Antwort „0,005“ bei Aufgabe S2 (Tab. 2) auf eine vergleichsweise geringe Relevanz dieser Fehlvorstellung hin. In Summe verdeutlichen die verschiedenen Strategien jedoch noch einmal, dass viele Schüler andere Aspekte fokussieren als die fortgesetzte Division durch 10.

4 Konsequenzen für den Unterricht

Das Stellenwertverständnis bildet die Grundlage für einen verständnisbasierten Umgang mit Dezimalbrüchen, da z. B. nur derjenige den Additionsalgorithmus verstehen kann, der auch die Stellenwertanordnung und das Bündelungsprinzip verstanden hat. Den obigen Ergebnissen zufolge besteht hier großer Handlungsbedarf im Unterricht, wobei ein zentrales Ziel in der Entwicklung einer inhaltlichen Vorstellung von den Stellenwerten bestehen sollte, da sich hiermit die Fehlerhaftigkeit der beschriebenen Vorstellungen und Strategien gut verdeutlichen lässt. In diesem Zusammenhang sollte mit den Schülern konkret erarbeitet werden,

- dass die Reihe der Stellenwerte eine feste Ordnung hat,
- dass es keine „Eintel“ gibt,
- dass Hunderter größer sind als Zehner, Hundertstel aber kleiner als Zehntel, …

Eine sinnvolle Hilfe zur Ausbildung inhaltlicher Vorstellungen ist der Einsatz von Zehnerblöcken (Mehrsystemblöcken), die hierzulande vorwiegend zur Veranschaulichung natürlicher Zahlen genutzt werden. Einer amerikanischen Experimentalstudie von Wearne & Hiebert (1988) zufolge kann dieses Material auch in der Dezimalbruchrechnung erfolgreich eingesetzt werden, indem die großen Würfel nicht mehr als Repräsentanten für Tausender, sondern (meist) für Einer fungieren. Durch vielfältige Übungen mit diesem Material lassen sich neben dem Aufbau von Dezimalbrüchen auch die Zusammenhänge zwischen den Stellenwerten und Regeln für den Umgang mit Dezimalbrüchen (z. B. Erweitern und Kürzen) auf anschaulicher Ebene gut verdeutlichen. In einer neueren australischen Studie erweist sich ein ähnliches Material (Lineare Arithmetik-Blöcke, vgl. Abb. 1; aus Archer & Condon 1999, S. 50) sogar als noch geeigneter, da es gegenüber den Zehnerblöcken einige Vorteile besitzt (vgl. hierzu Stacey et al. 2001).

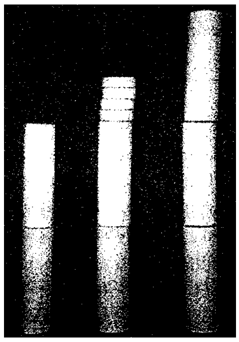

Abb. 1: Lineare Arithmetik-Blöcke

5 Literatur

Archer, S. & Condon, C. (1999): Decimals: adressing students’ misconceptions. In: Scott, N. et al. (Hrsg.): Mathematics: across the ages. Brunswick (Australia): Mathematical Association of Victoria, S. 46–54.

Padberg, F.: Didaktik der Bruchrechnung. 3. Auflage. Heidelberg, Berlin: Spektrum 2002

Stacey, K. et al. (2001): The effect of epistemic fidelity and accessibility on teaching with physical materials: a comparison of two models for teaching decimal numeration. In: Educational Studies in Mathematics, Nr. 2, S. 199–221.

Wearne, D. & Hiebert, J. (1988): A cognitive approach to meaningful mathematics instruction: testing a local theory using decimal numbers. In: Journal for Research in Mathematics Education, Nr. 5, S. 371–384.