Günter Graumann, Bielefeld

Zugänge zu Werten trigonometrischer Funktionen im Bereich 90° bis 360°

Die Einführung und Behandlung trigonometrischer Funktionen erfolgt – wenn überhaupt – meist ohne Begründung und Hinterfragung der damit zusammenhängenden Definitionen. Lediglich die nachträglich erfolgenden Anwendungen können den Sinn der Begriffsbildungen aufleuchten lassen. Meiner Meinung nach sollte man aber auf die Hintergründe der Definitionen mit eingehen.

Für die ***Motivation der Einführung trigonometrischer Funktionen*** bietet sich u. a. ein genetischer Zugang[1] an, bei dem historische Gesichtspunkte mit einbezogen werden können. Schon seit Thales hat man mittels der Dreieckslehre unmessbare Entfernungen ermittelt, indem ähnliche Dreiecke gezeichnet, die gewünschte Entfernung in der Zeichnung gemessen und dem Maßstab entsprechend umgerechnet wurden, so wie man es heutzutage im Geometrieunterricht der Klasse 7/8 oft auch tut. Dieses Verfahren stößt aber an Grenzen, wenn das Verhältnis der gegebenen zur gesuchten Seite sehr klein bzw. sehr groß ist wie z. B. bei Dreiecken in der Astronomie. Dieses Problem ist bekanntermaßen auch der Auslöser für die Entwicklung der Trigonometrie (bei Aristarch um 270 v. Chr. und vor allem bei Hipparch um 150 v. Chr. und Ptolemaus um 150 n. Chr.) gewesen[2].

Bei der Einführung trigonometrischer Funktionen am rechtwinkligen Dreieck sollte auch diskutiert werden, dass die Ähnlichkeit aller rechtwinkligen Dreiecke[3] mit einem vorgegebenen Winkelmaß α (mit $0° < \alpha < 90°$) die Grundlage dafür bietet, einem Winkelmaß eindeutig eine Zahl (als Verhältnis zweier Seitenlängen) zuzuordnen.

Dass man aus kombinatorischen Gründen nun sechs verschiedene trigonometrische Funktionen bilden kann, wie diese voneinander abhängen und wie man die Werte dieser Funktionen für Winkelmaße zwischen 0° und 90° (außer durch Taschenrechnerdruck) ermitteln kann, ist ein weiteres Thema in diesem Zusammenhang, auf das ich aber hier nicht weiter eingehen kann. Vielmehr möchte ich jetzt auf mein eigentliches Thema zu sprechen kommen.

---

[1] Vgl. etwa: Graumann, G. (1987). Eine genetische Einführung in die Trigonometrie. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1987, Bad Salzdetfurth 1987, S. 146 - 149.

[2] Vgl. etwa: Braunmühl, A. v. (1900). Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. Nachdruck 1971 Teubner: Stuttgart, S. 7ff.

[3] Hipparch und Ptolemäus benutzten zwar gleichschenklige Dreiecke, in der Schule wird man (wie seit den Indern ab ca. 400 n. Chr.) mit dem rechtwinkligen beginnen.

Spätestens bei der Behandlung stumpfwinkliger Dreiecke stößt man auf die ***Erweiterung trigonometrischer Funktionen*** auf den Bereich der Winkelmaße 90° bis 180°. Hierbei taucht eine Situation auf, die in der Mathematik häufiger vorkommt: ***Ein bekannter Begriff soll auf einen neuen Bereich erweitert werden***. Im Sinne einer nicht kurzsichtigen mathematischen Bildung sollte man es sich im Unterricht nicht entgehen lassen, diesen Aspekt (an dem konkreten Beispiel) ausführlicher zu behandeln. Dabei ist zunächst einmal hervorzuheben, dass man in der Mathematik prinzipiell eine Definition (bis auf logische Widersprüche) völlig frei gestalten kann. Andererseits soll eine Definition sich auch sinnvoll in den bekannten Rahmen einfügen und bei der Erweiterung eines Begriffs auf einen größeren Bereich ist es üblich, dass bestimmte ***Gesetzmäßigkeiten im erweiterten Bereich ihre Gültigkeit erhalten sollen***.

In unserem Fall können wir die Suche nach solchen Gesetzen und deren Diskussion den Lernenden zur selbsttätigen Arbeit überlassen. Dabei werden erfahrungsgemäß Gesetze wie „$\sin(90° - \alpha) = \cos \alpha$“ oder andere Zusammenhänge zwischen den trigonometrischen Funktionen, der Sinus- und Cosinussatz für beliebige Dreiecke sowie die Definitionen am Einheitskreis wie etwa „$\sin \alpha$ = y-Koordinate“ oder (sofern schon behandelt) „$\sin(\alpha+\beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$“ genannt. In arbeitsteiliger Gruppenarbeit können alle diese (oder auch noch andere) Vorschläge näher daraufhin untersucht werden, ob sie zum Problem etwas beitragen können.

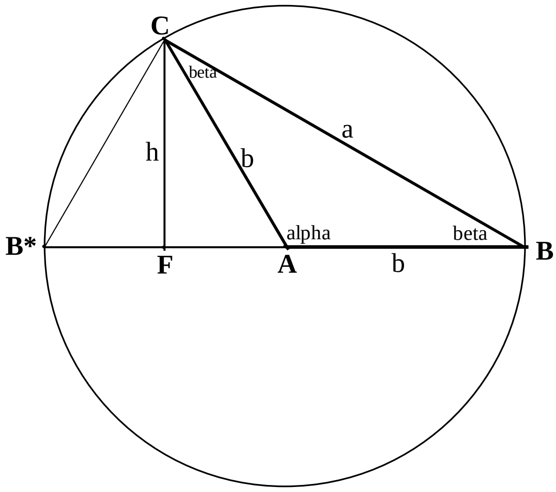
Beim ***Vorschlag „$\sin(90° - \alpha) = \cos \alpha$“*** wird man sehr schnell feststellen, dass damit das Problem nur auf die Definition trigonometrischer Werte für negative Winkelmaße verschoben wird.

Bei der ***Definition am Einheitskreis***, die in den Schulbüchern meist zu finden ist, tritt die Frage auf, ob die Vorzeichen der Koordinaten zu berücksichtigen sind oder nicht? Bei den Definitionen am rechtwinkligen Dreieck hatten wir es ja immer nur mit Verhältnissen von Längen zu tun; und die sind immer positiv. Das Kreismodell allein gibt keine Antwort auf die Frage des Vorzeichens.[4]

Die Erweiterung des ***Sinus- und Cosinussatzes*** auf den neuen Bereich liefert uns dann eine Lösung, wenn man stumpfwinklige Dreiecke genauer

[4] Dieser Aspekt wird oft einfach übergangen, so dass kritisch denkende Menschen verunsichert werden und sich nicht mehr trauen, intuitiv vorhandene Unklarheiten explizit zu äußern, während andere Schüler und Schülerinnen darin bestärkt werden, nur auf den algorithmischen Aspekt der Mathematik zu achten.
Dadurch dass – wie es in einigen Schulbüchern zu finden ist – das Kreismodell mit den Koordinaten zur Einführung der trigonometrischen Funktionen verwendet wird, ändert sich an dem genannten Problem im Prinzip nichts, außer dass es noch weniger zu erkennen ist und eine Motivation für eine solche Definition gänzlich fehlt.

betrachtet. Der Einfachheit halber gehen wir dabei von einem gleichschenklig- stumpfwinkligen Dreieck aus und betten dieses in einen Kreis mit einer der beiden gleichlangen Seiten als halben Durchmesser ein.



Setzen wir nun den Sinussatz auch für stumpfwinklige Dreiecke voraus, so ergibt sich $a/\sin\alpha = b/\sin\beta$ bzw. nach Umformung $\boldsymbol{\sin\alpha = \frac{a}{b}\cdot\sin\beta}$,

womit wir den Sinus eines stumpfen Winkels berechnen können.
Hiermit ergibt sich auch, dass $\sin\alpha$ positiv ist, da alle drei Größen a, b und $\sin\beta$ positiv sind.

Wir können an der Figur aber noch weitere Tatsachen entdecken: Einmal gilt im Dreieck ABC wegen der Winkelsumme $2\cdot\beta = 180°-\alpha$ und damit $\beta = 90° - \frac{\alpha}{2}$, womit wir $\sin\alpha = \frac{a}{b}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$ erhalten und damit den Sinus für stumpfe Winkel auf den Cosinus für spitze Winkel zurückführen können. Wollen wir nun aber $\frac{a}{b}$ nicht messend ermitteln, so ergibt sich z. B. bei Betrachtung des von ABC halben Dreiecks[5] $\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\beta = \frac{a}{2\cdot b}$, d. h. es ist $\frac{a}{b} = 2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$. Insgesamt gilt also[6] $\boldsymbol{\sin\alpha = 2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Weiterhin können wir den Winkel $180°-\alpha$ ins Auge fassen. Über die Dreiecke ACF sowie BCF erhalten wir die Gleichungen $\sin(180°-\alpha) = h/b$ und $h = a\cdot\sin\beta$, womit sich $\sin(180°-\alpha) = \frac{a}{b}\cdot\sin\beta$ ergibt. Mit dem Ergebnis aus dem Sinussatz folgt daraus $\boldsymbol{\sin(180°-\alpha) = \sin\alpha}$.

---

[5] Man kann auch das Dreieck BCB* betrachten und erhält nach dem Thalessatz einen rechten Winkel bei C. Dann folgt auch diese Beziehung sowie $|CB^*| = 2b\cdot\sin\beta$ und nach dem Satz von Pythagoras $|CB^*|^2 = 4b^2 - a^2$.

[6] Eine Formel, die man auch mittels des Halbwinkeltheorems erhalten könnte.

Setzen wir nun den Cosinussatz für das stumpfwinklige Dreieck ABC voraus, so erhalten wir $a^2 = b^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot b \cdot \cos\alpha$ und damit $\cos\alpha = 1 - \frac{a^2}{2 \cdot b^2}$, wobei (wie wir oben mit Dreieck BCB* gesehen haben oder im halbierten Dreieck ABC erkennen können) $\frac{a}{2 \cdot b} = \cos\beta$ gilt, so dass sich $\mathbf{\cos\alpha = 1 - 2 \cdot \cos^2\beta}$

ergibt. Mit dem trigonometrischen Pythagoras folgt daraus dann $\cos\alpha = -(1-2\cdot\sin^2\beta)$ oder $-(\cos^2\beta - \sin^2\beta)$. Wegen $\beta < 45°$ d.h. $\sin^2\beta < 0.5$ oder $(\cos^2\beta - \sin^2\beta) = \cos 2\beta$ können wir schon ersehen, dass **$\cos\alpha$ negativ** sein muss, also nicht als Längenverhältnis allein definiert sein kann, sondern mit Vorzeichen (wie bei den Koordinaten) behaftet ist.
Fassen wir wieder den Winkel $180° - \alpha$ ins Auge, so ergibt sich im Dreieck ACF $\cos(180° - \alpha) = |AF|/b$ wobei nach Pythagoras $|AF|^2 = b^2 - h^2$ mit $h = a \cdot \sin\beta$ (im Dreieck BCF) gilt, d. h. $\cos^2(180° - \alpha) = 1 - \frac{a^2}{b^2} \cdot \sin^2\beta$.

Mit dem obigen Ergebnis des Sinussatzes folgt dann
$\cos^2(180° - \alpha) = 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$ und wegen des festgestellten Vorzeichens haben wir damit $\mathbf{\cos(180° - \alpha) = -(\cos\alpha)}$.

Die Tangensfunktion erweitern wir nun durch Fortführung des Gesetzes $\tan\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$, womit sich ergibt, dass $\tan(180° - \alpha) = -(\tan\alpha)$ ist.

Für den Bereich 180° bis 360° empfiehlt es nun, die Symmetrien am Einheitskreis zu nutzen und die Vorzeichen entsprechend den Koordinatenvorzeichen des zugehörigen Kreispunktes zu wählen.

Über die ***Summen- und Differenzregeln*** können wir ebenfalls die trigonometrischen Funktionen erweitern, wobei wir sofort den ganzen Bereich von 90° bis 360° (und sogar darüber hinaus) erfassen können. Z. B. ist
$\mathbf{\sin(90°+\varphi)} = \sin 90° \cdot \cos\varphi + \cos 90° \cdot \sin\varphi = 1 \cdot \cos\varphi + 0 \cdot \sin\varphi = \mathbf{\cos\varphi}$ oder
$\mathbf{\cos(90°+\varphi)} = \cos 90° \cdot \cos\varphi - \sin 90° \cdot \sin\varphi = 0 \cdot \cos\varphi - 1 \cdot \sin\varphi = \mathbf{-(\sin\varphi)}$.
Weitere Gleichungen (z.B. für $\sin(180°-\alpha)$ etc.) sollten untersucht werden und sind gute Übungen. Auch die Verwendung der Formeln für den halben Winkel sind dabei geeignet, wie wir schon oben fest festgestellt hatten.
Falls die Summen- und Differenzregeln erst später behandelt werden, so stellen diese dann eine gute Möglichkeit zur Überprüfung der früher gemachten Festlegungen dar. Ich halte es aber für angebracht, die Summen- und Differenzregeln zunächst für den Bereich 0° bis 90° zu beweisen und die Erweiterung der trigonometrischen Funktionen auf den Bereich 90° bis 360° danach zu behandeln, wobei dann – wie oben erwähnt – verschiedene Zugänge miteinander verglichen werden können.