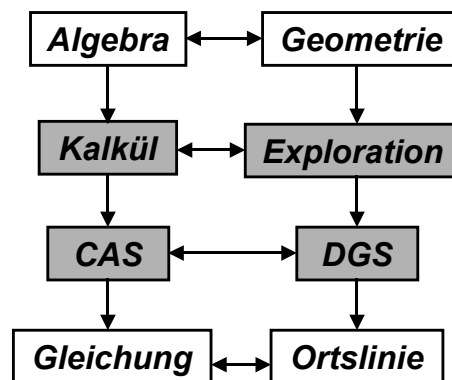


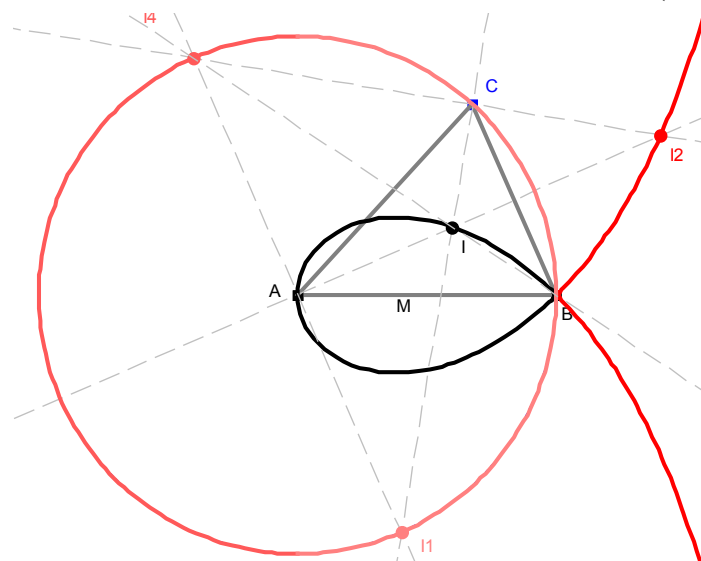
Thomas GAWLICK; Landau

## Benchmarks zur Verknüpfung von CAS und DGS

R. Oldenburg stellte im JMD 3/4(2005) das seinem Programm Feli-X zugrunde liegende Konzept zur "bidirektionalen" Verknüpfung von CAS und DGS vor. In der Literatur gibt es diverse Beispiele für "new possibilities, for instance in the simultaneous processing of several different representations." (Tall 1991). So zeigt z.B. Gawlick (2001c) an den zuerst von Hölzl untersuchten Ortskurven  $\mathcal{H}$  des Höhenschnittpunkts H das nebenstehende fruchtbare Wechselspiel von CAS und DGS. Die Exploration von  $\mathcal{H}$  per DGS alterniert mit dem Kalkül der analytischen Geometrie im CAS. So erhält man eine computergestützte Kartesische Korrespondenz: Punkt  $\leftrightarrow$  Koordinaten, Ortslinie  $\leftrightarrow$  Gleichung, Konstruktion  $\leftrightarrow$  Funktion! Entscheidend ist dabei ein Repräsentationswechsel: von der *funktionalen* Sicht (bewegter Punkt H  $\leftrightarrow$  Parametrisierung  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$ ) zur *relationalen* Sicht (geometrischer Ort  $\mathcal{H} \leftrightarrow$  Gleichung  $f(x,y)=0$ ) durch *Elimination* des Parameters. Als Technik ist dies auch der Schlüssel zur Wirkmacht von CAS (via Gröbner-Basen).



Allerdings sieht man schon bei H: die Kartesische Korrespondenz ist gestört, die geometrische **Ortslinie** nur ein echter Teil der algebraischen **Ortskurve**! Bei der Ortskurve  $\mathcal{J}$  des Inkreismitelpunkts I, wenn C auf dem Kreis K um A durch B läuft, zeigt sich:  $\mathcal{J}$  besteht aus einer Strophoide *und* einem Kreis, die ihrerseits je zwei

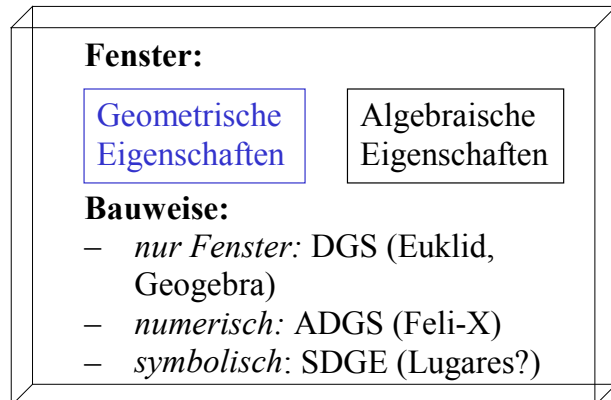


Örter von I und den Ankreismittelpunkten I1..I3 enthalten. Der *geometrische* Ort von I lässt sich also nur als eine **semialgebraische Menge** beschreiben !

Das verdeutlicht, dass so mächtige Werkzeuge wie CAS in Kopplung mit DGS ungeahnte fachliche und damit auch didaktische Herausforderungen stellen. Diese durchdenke man vor einem schulischen Einsatz und sinnvoller Weise auch schon bei der darauf abzielenden Genese eines solchen **ADGS** (Oldenburg 2005). Vorschläge dazu gibt es diverse, vgl. Strand 5 von ICTMT 5 (2001) sowie Botana&Valcarce (2004): „Considerable attention and efforts are being

given to an emerging field which can be termed *Symbolic Dynamic Geometry Environment* (SDGE), a synthesis of CAS and DGS.“

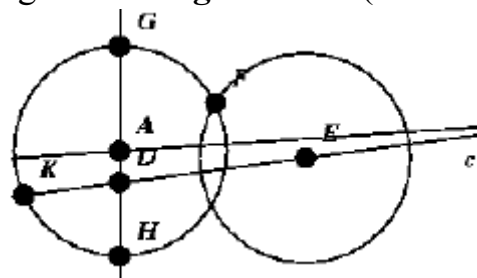
NB: Es liegt nahe, mit diesen Bezeichnungen die verschiedenen Systeme nach ihrer internen Funktionsweise zu differenzieren (ADGS: numerisch, SDGE: symbolisch). Zu unterscheiden sind beide Klassen von Systemen mit bloß extern benutzbarem Algebra-Fenster – wobei Feli-X derzeit das einzige System ist,



das bidirektional operiert, also auch algebraische Veränderungen an geometrischen Objekten zulässt. Dagegen rechnet Feli-X intern aus Zeitgründen numerisch und nicht symbolisch. Welche Art von System man benötigt, hängt natürlich von den intendierten Anwendungen ab. Hier dienen elementargeometrische Beispiele als **Benchmarks (BM)** für ADGS und zur Verdeutlichung mathematischer und didaktischer **Knackpunkte (KP)**.

**KP1: Was ist Stetigkeit?** Wie Oldenburg (2005) schreibt, „können Artefakte der algebraischen Modellierung an der Oberfläche sichtbar werden. Bei DGS ist das z.B. bei den springenden Punkten der Fall (Kortenkamp 1999). Ein Grundverständnis der algebraisch-rechnerischen Arbeitsweise eines DGS kann deshalb zum kompetenten Umgang mit diesem Werkzeug beitragen.“ Sic! Und ein Grundverständnis der Hintergrund-Theorie ebenso: **Die „springenden Punkte“ sind keine Artefakte der algebraischen Modellierung!** Sie sind auch nicht unbedingt unstetig! Zur Theorie siehe Gawlick (2003) und die Langfassung. Aus Platzgründen hier nur eines der zugrundeliegenden Phänomene:

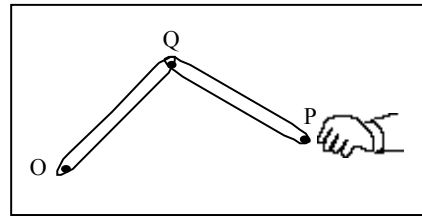
**KP2: Verhalten von Schnittpunkten im Ausartungsfall** Gegeben seien zwei Einheitskreise um A und E mit Schnittpunkt F. Bewegt man E längs einer Geraden über A hinweg, springt F in deterministischen DGS. Das ist nur scheinbar unstetig: Denn die Lage von F für A=E ist ja (nach Euklid!) undefiniert. Bei Cinderella springt F nicht – aber das bewirkt, dass eine „kontinuierliche Lageveränderung“ des Zugweges **unstetig** verläuft (Gawlick 2001a): Zieht man E längs c durch D, bewegt F sich auf G zu, kehrt dann um und läuft über H bis K. Für  $D \rightarrow A$  muss F bei stetigem Grenzübergang von G nach H springen. Also:



**KP3: Stetigkeit punkt- oder wegweise?**

Was für eine Dynamik braucht die Praxis? Das illustriert folgendes Beispiel:

**BM1: Modellierung eines Gelenkarms** Für diesen einfachen Gelenkmechanismus gibt es zwei statisch äquivalente Konstruktionen mit unterschiedlicher Dynamik! **Beide** sind physikalisch sinnvoll und sollten **modellierbar** sein. Das geht derzeit *nur* mit deterministischen DGS.

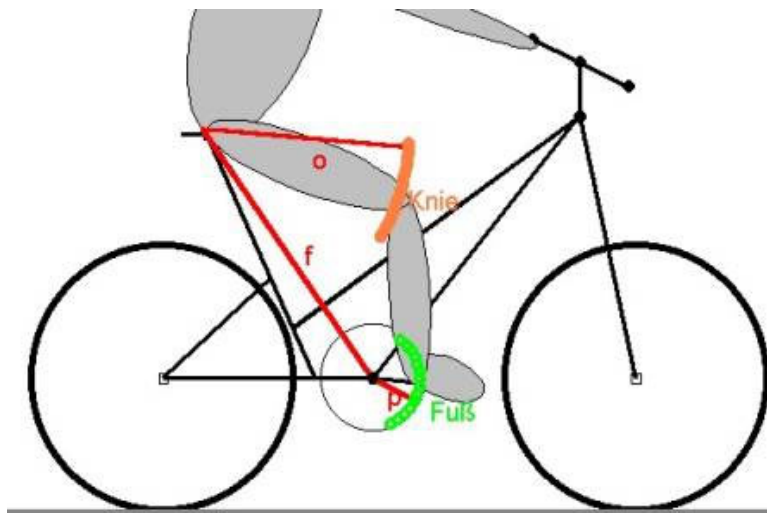


**KP4: Reelle oder komplexe Geometrie?** Gawlick (2004) zeigt: Beim Drehen einer **komplexen** Winkelhalbierenden *kann* jeder Punkt stetig in sich überführt werden, *ohne* dabei das Drehzentrum zu treffen. Wie soll man sich das vorstellen? Oder gar im Unterricht vermitteln? Das wäre aber nötig, damit die *visuell sprungfreie* Bewegung auch keine *epistemologischen Brüche* verursacht! Also:

**BM2: Halbfreie Punkte** Ein SDGE soll entweder deren **Freiheitsgrade benutzbar** oder ihre **Einschränkungen transparent machen**, sowie das **Zugverhalten begründen** (und es im komplexen Fall **interpretieren**). Insbesondere sollen **Punkte auf einer Kardioide** oder auf einer **logarithmischen Spirale** mathematisch korrekt behandelt werden, dito die **Variation des Trägers**. Schon Punkte auf Kegelschnitten sind ein ungelöstes Problem (Genevès 2004).

**KP5: Reale vs. virtuelle Dynamik** Deterministische DGS zeigen oft auch nur einen Teil des reellen Orts, relational-stetige DGS dagegen oft auch komplexe Teile, die real/reell gar nicht auftreten können. Ein einfaches Beispiel:

**BM3: Der Radfahrer als Gelenkviereck** aus Oberschenkel  $o$  und Unterschenkel  $u$  des Fahrers, Pedalstange  $p$  und Fahrradstange  $f$  des Rades. Der Zugmodus erlaube es, die **Bewegung** so **einschränken**, dass *oupf* fortbesteht („das Knie nicht kaputt geht“). Sie sei sowohl von  $o$  als auch von  $p$



**erzeugbar** (*beide* Füße treten.) Dieses „reverse dragging“ als ein Umkehren der Konstruktionsreihenfolge ist ein wesentlich neues Element von ADGS, da bei DGS i.d.R. nicht möglich (in Euklid begrenzt mit Strecken fester Länge).

**BM4: Reelle Ortslinien** Die Wege von Knie und Pedal seien **algebraisch als Ortslinien darstellbar** und **geometrisch durch eigenes Ziehen vollständig erfahrbar**. Bei Cinderella ist der reelle Ort nur in der Animation sichtbar – beim händischen Ziehen „zerreißt“ das Knie.

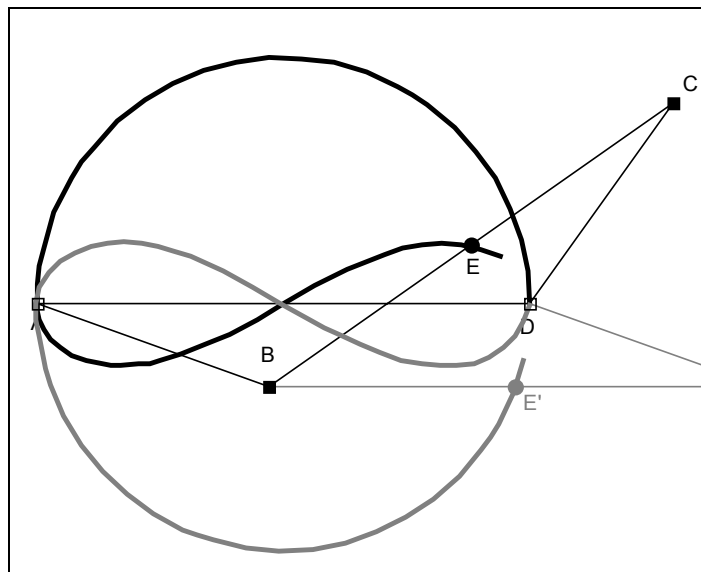
**BM5: Koppelkurve des überschlagenen Gelenkparallelogramms  $ABCD$ .**  
 Für  $|\overline{AB}| = a = |\overline{BE}| / \sqrt{2}$  durchläuft der Mittelpunkt  $E$  von  $BC$  bei festem  $AD$  eine **Bernoullische Lemniskate**.

a) (geom.)  $ABCD$  lasse sich (wie ein Mechanismus!) in ein Parallelogramm überführen.  $E$  durchläuft dann den **Pferchkreis** der Lemniskate.

b) (alg./geom.) Berechne und zeige die vollständige **Koppelkurve**  $O$  von  $E$ .

c) (alg.) Zerlege die Gleichung von  $O$  entsprechend zu den Komponenten von  $O$ :  $f(x,u) = ((x^2 + u^2)^2 - a^2(x^2 - u^2))(x^2 + u^2 - a^2) = 0$ .

Kein DGS kann  $O$  komplett zeigen – wohl aber Feli-X!  
 BM 5c) erfordert ein SDGE.



**BM6: Konsistente Kartesische Korrespondenz für I**

a) Man definiere *algebraisch* nutzbare Objekte für die Ortslinien von I, I1..I3.

b) Man spezifiziere, wie sich Punkte auf Ortskurven wie  $\mathcal{H}$  und  $\mathcal{J}$  verhalten..

c) Wenn man I auf eine andere Komponente von  $\mathcal{J}$  zieht

– was macht dann C? Und wie verhalten sich dabei die Winkelhalbierenden?

**BM7: Voll ziehbares Dreieck** Euklid hat *beidseitig* ziehbare Strecken fester Länge, kann *daraus* aber kein Dreieck mit festen Seitenlängen bilden. Ein ADGS wie Feli-X ermöglicht das Ziehen an allen seinen Ecken.

**BM8: „Die konstruierten Punkte noch binden“** (Hölzl 1994) Häufig entsteht bei Problemaufgaben der Wunsch, einen konstruierten Punkt einer zusätzlichen Bedingung zu unterwerfen – bei Hölzl z.B. möchte Igor sehen, wann P mit M zusammenfällt, um zu überschauen, wann  $ABC$  in zwei gleichschenklige Teildreiecke zerlegbar ist. Anders als mit DGS ist es mit ADGS möglich, durch die *algebraische* Zusatzbedingung  $d(P,M)=0$  die Beweglichkeit der Konstruktion einzuschränken und so im Zugmodus den Lösungsraum zu durchlaufen.

**Literatur** In der Langfassung: mit Beispieldateien erhältlich unter [gawlick@uni-landau.de](mailto:gawlick@uni-landau.de).

