

Lutz FÜHRER, Frankfurt am Main

„Siehe“-Beweise für elementare Volumenbestimmungen

Traditionell wurden (und werden noch) am Ende der Mittelstufe Volumenformeln mit heuristischen Grenzwertbetrachtungen für einige nichttriviale Körper hergeleitet. Offensichtlicher Zweck war und ist die Vorbereitung einer echten „Infinitesimalrechnung“ auf Oberstufen, die – etwa im Geiste des angelsächsischen Calculus – numerische Anwendungsbezüge einer streng(er)en Analystheorie vorordnet. Leider werden viele Schüler – heute, nach einhundert Jahren, auch wieder an Gymnasien – kaum noch approximative Betrachtungen bei räumlichen Integrationen erleben, geschweige denn lernen. Es macht also nicht nur für Haupt- und Realschüler wieder Sinn, über anschaulich-informelle und weitgehend grenzwertfreie Herleitungen für das traditionelle Arsenal nichttrivialer Volumenberechnungen neu nachzudenken. Gegenstand des Vortrags waren entsprechend „höhere“, aber elementare¹ Volumenbestimmungen für eine recht große Klasse von Körpern mithilfe des Ähnlichkeits- und des Cavalieri-Prinzips. Die Argumentationen wurden durchweg so gewählt, dass sie sowohl abschluss- als auch (auf einer Oberstufe oder im Studium) anschlussfähig sind.

Zugegeben, Stereometrie gehört nicht (mehr) zu den Favoriten des Mittelstufenunterrichts, und es steht zu befürchten, dass an höheren Schulen die Vorverlegung der Oberstufe in 10. Klassen ein Übriges tun wird. Außerdem machen Volumenberechnungen natürlich nur einen Teil jeder halbwegs sinnvollen Schulung in Raumgeometrie aus, denn Lagebeziehungen, innere Maßverhältnisse, Darstellungstechniken und Oberflächenbestimmungen sind auch nicht von jetzt auf gleich zu lernen. Immerhin bieten aber Rauminhaltsbestimmungen der heutigen Lehrplansituation besondere Vorteile:

- Sie sind auf numerische Ergebnisse ausgerichtet, und passen damit gut zur kurzatmigen, aber modisch-aktuellen „Outputorientierung“.
- Sie trainieren und flexibilisieren Raumanschauung. Dabei können heute Darstellungs- und Variationsmöglichkeiten auf dem PC in nie da gewesener Weise helfen und anregen.²
- Sie vermitteln handwerksnahe Grundfertigkeiten und -kenntnisse.
- Sie wiederholen und verbinden gewissermaßen „vollautomatisch“ stereometrische und planimetrische Kenntnisse mit algebraischen.

¹ „Elementar“ meint hier Verzicht auf Begriffs-, Definitions- und Grenzwertprobleme.

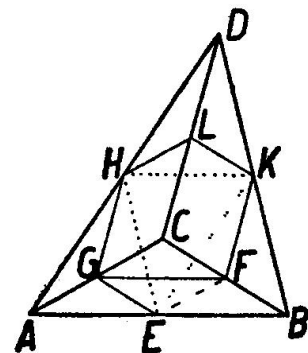
² Der Vortrag stützte sich weitgehend auf MuPAD-Video-Animationen.

- Sie erlauben vielfältig differenzierte Aufgabenstellungen mit gut dosierbaren Anteilen einerseits von handgreiflicher Anschaulichkeit, andererseits algebraisch-geometrischer Durchdringung.

1. Pyramiden und Pyramidenstümpfe

Im Papyrus Moskau wird ein spezieller Pyramidenstumpf so berechnet, als gelte es, in die heute bekannte Formel einzusetzen. VAN DER WAERDEN 1966 bietet eine Abbildung und Übersetzung sowie den Versuch einer anschaulichen Herleitung. Am Ende heißt es dort (S. 57): „Wie dem auch sei, jedenfalls müssen die Ägypter den Inhalt der Pyramide gekannt haben.“ Wahrscheinlich war dem so, denn die Pyramiden standen ja schon lange zuvor am Nil, aber die Wörtchen „jedenfalls müssen“ sind zweifelhaft, denn der hier behandelte Pyramidenstumpf hat eine besondere Eigenschaft: Die fehlende Ergänzungspyramide passt so gut in ihn hinein, dass nur noch zwei Prismen und eine quadratische Säule überstehen. Diese einfacheren Überstandkörper erlauben die Volumenberechnung ohne Kenntnis des Pyramideninhalts, weil die ergänzte Pyramide nach dem Ähnlichkeitsprinzip³ das Achtfache der ausgeschnittenen füllt.

Die gleiche Zerschneidungstechnik über Mittelparallelen findet sich in EUKLID XII, 3, wo der Restkörper aus zwei Prismen freilich nur abgeschätzt wird. WEITBRECHT wies (meines Wissens erstmals) darauf hin, dass sich mit dem Streckungsargument aus dem Restkörper die Volumenformel für beliebige Pyramiden und Pyramidenstümpfe fast zwanglos ergibt.



2. Prismatoide

Von STEINER 1842 stammt die Idee, das Volumen von (später sog.) „Prismatoiden“ mittels der Simpson-Regel zu bestimmen. Diese Polyeder haben als Grund- und Deckfläche Polygone in parallelen Ebenen und als Seiten Dreiecke.⁴ Prismatoide müssen nicht konvex sein. Mithilfe eines Parallelschnitts und eines inneren Punktes auf halber Höhe zerfällt jedes Prismatoid in zwei Pyramiden halber Höhe über der Grundfläche bzw. unter der Deckfläche sowie in Dreieckspyramiden mit den Dreiecksseiten als Hilfs-Grundflächen. Zerlegt man letztere durch Mittelparallelen, so zerfällt jede

³ Körper oder Flächen mit k -fach gestreckten Maßen haben den k^3 - bzw. k^2 -fachen Inhalt. (Vgl. EUKLID XI, 33)

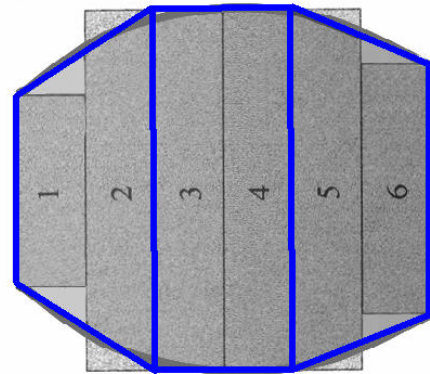
⁴ Jeder Polyeder lässt sich natürlich als schichtenweise prismatoid vorstellen und berechnen.

zugehörige Dreieckspyramide in vier raumgleiche, von denen eine als über oder unter dem Mittelschnitt stehend (hängend) und von halber Ausgangshöhe angesehen werden kann, so dass folgt:

$$V_{\text{Prismatoid}} = \frac{\text{Bodenfläche} + 4 \cdot \text{Mittelschnitt} + \text{Deckfläche}}{6} \cdot \text{Höhe}$$

3. Die Fassregel

Die für Prismatoide hergeleitete Formel wird oft (unberechtigt) als „Keplersche Fassregel“ oder „Simpson-Regel“ bezeichnet. Sie ist bekanntlich für eine sehr viel größere Klasse von Körpern exakt (insbesondere für fast alle in der Mittelstufe vorkommenden), und sie ist immer noch eine der besten Integrationshilfen in der mathematischen Numerik. Eine plausible Herleitung für typische Fassformen benutzt⁵ zusätzlich zu KEPLERS Kegelstumpfpaar noch einen Zylinder (gleicher Breite) mit Bauchdurchmesser und wertet die Kegelstümpfe mit der babylonischen (und im Forstwesen lange üblichen, etwas zu kleinen) Näherung



aus. Die Fassregel und ihr approximativer Charakter sind sofort zu „sehen“.

$$V_{\text{Kegelstumpf}} \approx \frac{\text{Bodenfläche} + \text{Deckfläche}}{2} \cdot \text{Höhe}$$

4. Nutzung des Cavalieri-Prinzips

Historisch hat das Cavalieri-Prinzip sehr wesentlich zur Entwicklung der Integralrechnung beigetragen. Am Ende der Mittelstufe kommt es heute aber nur noch bei der Herleitung des Kugelvolumens nach VALERIOS Variante des zweiten ARCHIMEDischen Beweises vor (1604).⁶ Dass hier zentrale Ideen der Integralrechnung antizipiert werden, lernen Schüler kaum noch – jedenfalls dann nicht, wenn Integrale lange nur mit ebenen Flächen und Stammfunktionen assoziiert werden und wenn Integrale von Querschnittsfunktionen sofort auf eine Rotationskörperformel reduziert werden. Das eigentliche Potenzial des Cavalieri-Prinzips, nämlich das Denken in flächentreuen Gestaltdeformationen, bleibt in der Regel ungenutzt, und das sowohl

⁵ wegen der Bogenschmiegun im Maximum

⁶ Eine Halb- oder Vollkugel wird schichtenweise mit einem konisch ausgeboarten Zylinder verglichen.

auf der Mittelstufe als auch in der Sekundarstufe II (und im Lehramtsstudium). Die folgenden Beispiele zeigen wohl deutlich genug, dass ein bescheidenes Maß einschlägiger „Formengymnastik“ der „mathematical literacy“ unser Schüler und Studierenden durchaus zuträglich wäre:

Die Funktion $f(x) := x^2$ ordnet jedem x des Einheitsintervalls ein „Quadrat“ zu. Stellt man es sich senkrecht zur x - y -Ebene vor, so entstehen bei variablem x die Querschnitte einer quadratischen Pyramide, die sich zum umgebenden Würfel wie 1:3 verhält, und folglich verhält sich – so im Wesentlichen die Argumentation von FRANS VAN SCHOOTEN um 1650⁷ – auch die erzeugte ebene Fläche unter der Parabel wie 1:3 zum Einheitsquadrat. (Durch Bewegungen und Scherungen sind daraus alle Parabelflächen erhältlich.) Deformiert man im Geiste ARCHIMEDES' die quadratischen Pyramidenschnitte zu Rechtecken konstanter Breite, so erhält man das Volumen eines parabolischen Zylinders⁸; deformiert man die Höhenflächen eines quadratischen Keils flächentreu zu Kreisen, so erhält man das Volumen eines Paraboloids⁸; überträgt man VAN SCHOOTENS Argument auf die quadratische Funktion $g(x) := 1 - x^2$, so bekommt man aus der Parabelfläche das Kugelvolumen. Usw.

Mithilfe des Flächenhalts von Parabelsegmenten erhält man bekanntlich nach dem Cavalieri-Prinzip eine exakte Herleitung der Simpson-Regel (NEWTON, Principia) und über einfache Interpolationsbetrachtungen deren Fehler „durch scharfes Hinsehen“.

Literatur:

EUKLID: Die Elemente. (Übers. C. Thaer). Darmstadt: Wiss. Buchges. 1980.

HOLZMÜLLER, G.: Elemente der Stereometrie, Band II. Leipzig: Göschen 1900.

STEINER, J.: Über einige stereometrische Sätze. In: Crelles J. r. a. Mathematik 23 (1842), 275-284.

STURM, J. C.: Des unvergleichlichen Archimedes Kunstbücher ... Nürnberg: C. Gerhard 1670.

VAN DER WAERDEN, B. L.: Erwachende Wissenschaft. Basel: Birkhäuser (2. Aufl.) 1966.

WEITBRECHT, T.: Zur Berechnung des Pyramideninhalts. In: UBl. 32 (1926), 244-246.

Eine ausführlichere Darstellung kann beim Autor angefordert werden:

<http://www.math.uni-frankfurt.de/~fuehrer>

⁷ nach dem Bericht von STURM 1670

⁸ Vgl. etwa HOLZMÜLLER 1900.