Joachim ENGEL, Hannover

# Modellierung von Wachstumskurven und dynamisch-interaktive Lernsoftware

Wachstumsprozessen bieten neben interessanten zu entdeckenden inner-mathematischen Strukturen herausragende Gelegenheiten den gesamten Modellierungsprozess einschließlich Modellbildung und kritischer Evaluation ins Zentrum der Schüleraktivitäten zu stellen. Interaktive dynamische Software nimmt dabei eine zentrale Rolle ein, um ein explorierendes und handlungsorientiertes Vorgehen zu ermöglichen.

## 1. Warum Wachstumskurven?

Wachstumskurven sind Kurven die die Änderung eines Phänomens oder Sachverhaltes über die Zeit beschreiben. Oft werden Wachstumsvorgänge durch eine Spezifizierung ihres lokalen Änderungsverhaltens in Form von Differenzen- oder Differenzialgleichungen spezifiziert. Unter didaktischen Gesichtspunkten nimmt dabei logistisches Wachstum eine besondere Rolle ein, weil es einerseits noch relativ leicht zu charakterisieren und zu motivieren ist, andererseits aber auch hinreichend komplex ist, um interessante Strukturen (bis hin zum Chaos im Feigenbaum-Diagramm) aufzuzeigen.

- Diskretes logistisches Wachstum

  $y_{n+1} = y_n + ky_n(S - y_n),$ mit Anfangswert $y_0$

- Kontinuierliches logistisches Wachstum

  $y'(t) = ky(t)\big(S - y(t)\big)$ mit Anfangswert $y(0)=y_0$ (1)

## 2. Ein Schulbuchbeispiel zum Logistischen Wachstum

Neuere Schulbücher und Unterrichtsmaterialien greifen den Themenbereich logistisches Wachstum auf, weil sich hier interessante Beispiele für einen datenorientierten Unterricht ergeben, der Inhalte aus Analysis und Stochastik verbindet, z.B. bei der Modellierung von Hefewachstum (Kohorst & Portscheller, 1999), Wachstum einer Sonnenblume (Hull & Langkamp), Entwicklung der PKW-Dichte in Deutschland, des Schienennetzes der Bahn oder der Nutzung und Verbreitung moderner Technologien wie z.B. Mobiltelefone oder Internetrechner (siehe Lambacher Schweizer). Ohne den Einsatz didaktisch geeigneter Software droht aber das didaktische Potenzial derartiger Aufgaben zu verkümmern. Betrachten wir das folgende Beispiel aus Lambacher Schweizer LK Analysis (Abbildung 1), so ist zunächst positiv hervorzuheben, dass im Gegensatz zu vielen Aufgaben aus traditionellen Schulbüchern mit realen (und nicht fingierten, erfundenen) Daten gearbeitet wird.

| Jahr | Bevölkerung (in Mio.) |
|---|---|
| 1790 | 3,93 |
| 1810 | 7,24 |
| 1830 | 12,87 |
| 1850 | 23,19 |
| 1870 | 38,56 |
| 1890 | 62,95 |
| 1910 | 92,41 |
| 1930 | 123,08 |
| 1950 | 152,27 |
| 1970 | 205,05 |
| 1990 | 249,44 |

Fig. 2

**13** Die Fig. 2 zeigt die Bevölkerungsentwicklung der USA in den letzten 200 Jahren.
a) Wählen Sie vier Wertepaare aus und führen Sie mit der angenommenen Sättigungsgrenze S = 350 (in Mio.) eine Funktionsanpassung durch, wenn logistisches Wachstum vorliegt. Welche Bevölkerungszahl erwarten Sie demzufolge im Jahr 2010? Vergleichen Sie mit Schätzungen des U.S. Census Bureau (http://www.census.gov).
b) Benutzen Sie ein Tabellenkalkulations- bzw. CAS-Programm für die folgenden Überlegungen. Nehmen Sie eine Funktionsanpassung mit allen Wertepaaren vor, wenn logistisches Wachstum vorausgesetzt wird. Verändern Sie die Sättigungsgrenze S und beurteilen Sie das jeweilige Ergebnis Ihrer Funktionsanpassung.
c) Suchen Sie weitere neue Fragestellungen und versuchen Sie diese zu beantworten.

Allerdings stecken in der Aufgabenformulierung viele Vorgaben, die einer Herausbildung von Modellierungskompetenzen eher im Wege stehen: Wieso liegt hier überhaupt logistisches Wachstum vor? Gibt es dazu inhaltliche Gründe? Zur Anpassung des logistischen Modells sind drei Parameter, nämlich der Anfangswert $y_0$, die Sättigungsgrenze $S$, und der Wachstumsfaktor $k$ aus den Daten zu schätzen. Für $S$ aber wird hier ein Wert vorgegeben. In Aufgabenteil b) soll dann offensichtlich eine Methode angewandt werden, die auf den vorangegangenen Seiten eingeführt wurde: Linearisierung durch Datentransformation. Aus (1) folgt nämlich

$$\ln\left(\frac{1}{y(t)}-\frac{1}{S}\right)=\ln\left(\frac{S-y_0}{Sy_0}\right)-kSt\,, \qquad (2)$$

woraus geschlossen werden kann, dass – falls das logistische Modell gilt und $S$ angemessen spezifiziert wurde – das Streudiagramm der transformierten Daten $(t_i, y_i{*})$ mit

$$y_i{*}=\ln\left(\frac{1}{y_i}-\frac{1}{S}\right) \qquad (3)$$

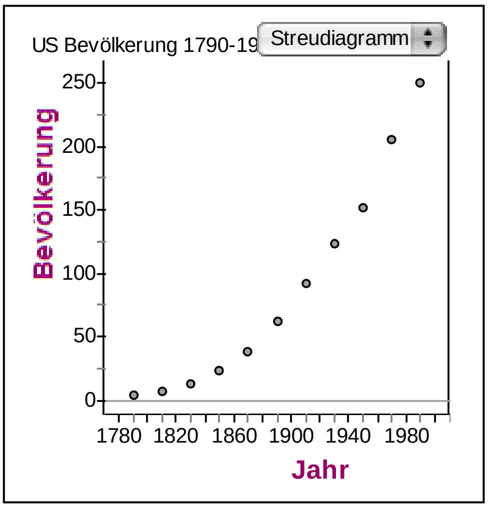
eine lineare Struktur hat. Mit Hilfe einer Geradenanpassung lassen sich dann die fehlenden Parameter $y_0$ und $k$ aus dem Achsenabschnitt und Steigung der eingepassten (kleinsten-Quadrate-) Gerade schätzen.

## 3. Dynamisch-interaktive Lernsoftware

Die Modellierung realer Daten erfordert folgende Schritte: 1. Wahl eines geeigneten Modells 2. Schätzen und Interpretieren der Modellparameter 3. Validierung des Modells

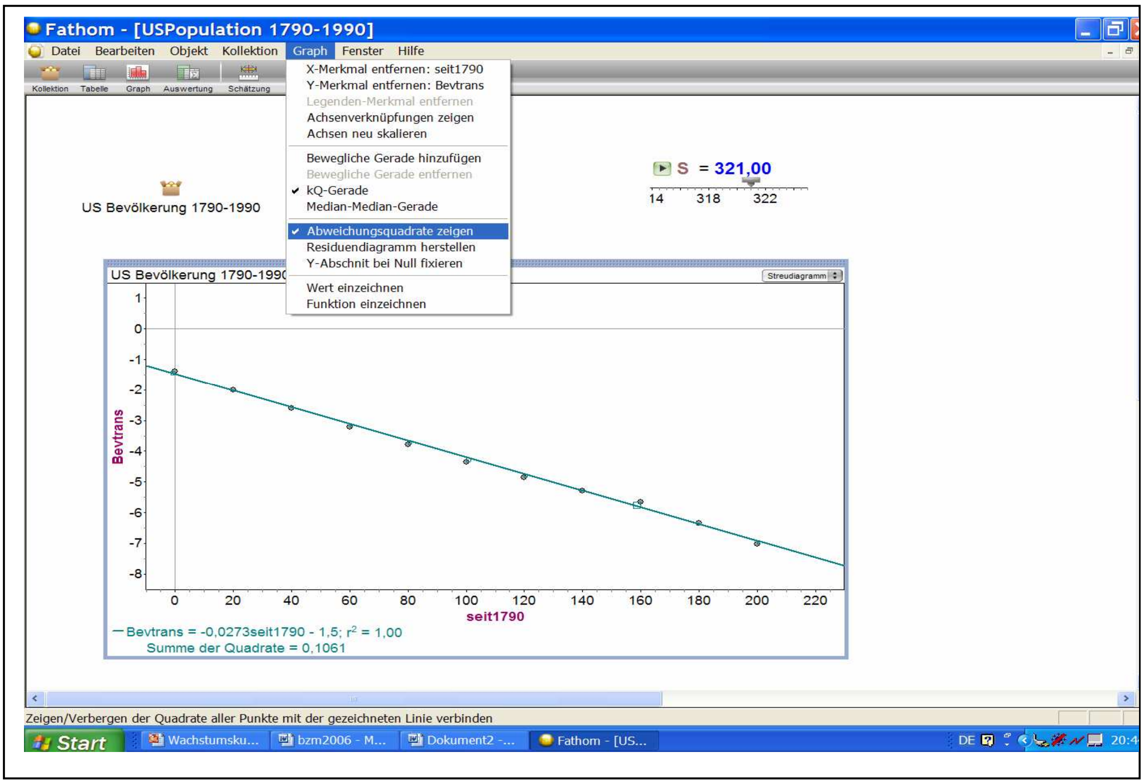
Da bei obiger Schulbuchaufgabe das Modell a priori vorgegeben ist, besteht für Schüler offensichtlich auch kein Anlass zur Validierung. Auch für den Parameter $S$ wird ein Wert direkt vorgegeben. Lediglich die beiden anderen Parameter $k$ und $y_0$ sollen geschätzt werden. Der Einsatz geeigneter Technologie bietet hingegen die Möglichkeit, allen obigen Anforderungen an Modellierungen gerecht zu werden.

Fathom (siehe Biehler, 2006) ist eine dynamisch-interaktive Lernsoftware zum Anwenden von Mathematik (Simulation, Datenanalyse, Modellbilden etc.). Zu den Charakteristika des Programms gehören ein Zugmodus zum Datahandling und Erstellung oder Änderung neuer Grafiken und Tabellen, ein simultanes Verändern von Daten in miteinander verbundenen Tabellen und Grafiken, die Möglichkeit über den Formeleditor flexibel eigene Modelle zu definieren, leichtes Durchführen von Simulationen, erstellen von Residuenplots, Einzeichnen von Abweichungsquadraten u.v.a.m.




Ein Streudiagramm der vorliegenden Daten kann mit quasi jedem CAS oder Tabellenkalkulationsprogramm erfolgen, und lässt den für logistisches Wachsen typischen Verlauf erahnen, der durch schnelles Wachsen zu Beginn, das das zunehmend gebremst wird, gekennzeichnet ist.

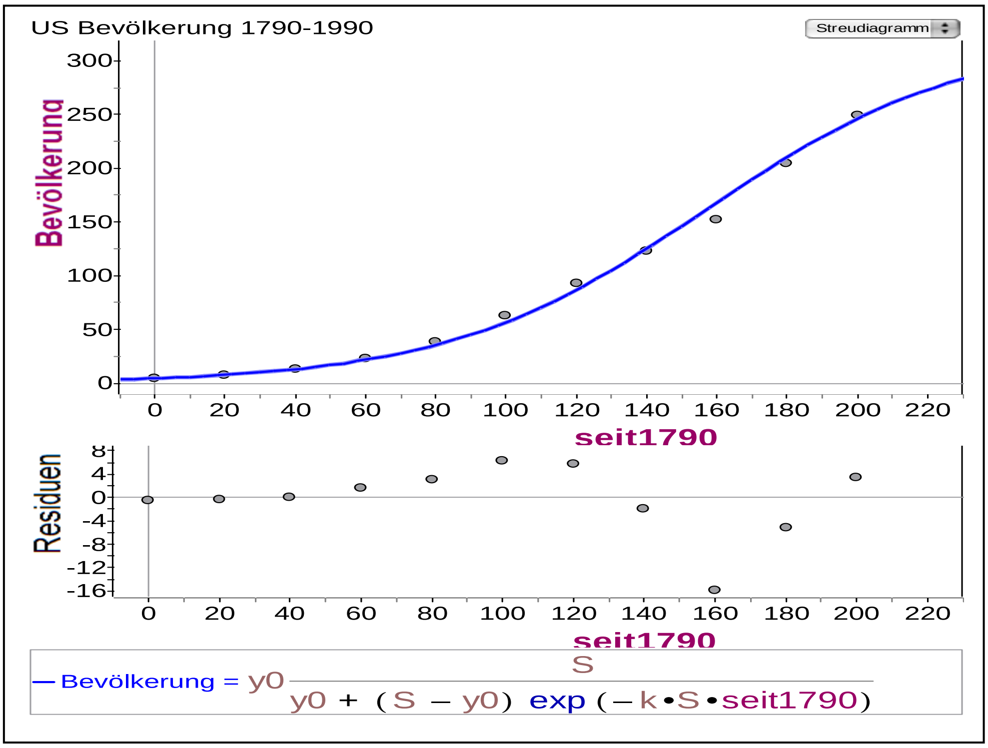
Bei der datengesteuerten Schätzung der Sättigungsgrenze *S* kommt das interaktiv-dynamische Potenzial von Fathom voll zur Geltung: Man definiert einen Schieberegler mit Namen *S*, und führt die zur Linearisierung führende Datentransformation (3) durch. Wegen der Verankerung der Daten im Jahre



1790 empfiehlt es sich, die Zeit-Achse zu reskalieren: $t^*= t$-1790. Dann passt man die kleinste-Quadrate Gerade in das ($t^*$, $y^*$) Streudiagramm ein, und wählt über die Schaltfläche von Fathom die Option `Abweichungs-quadrate zeigen`. Eine Veränderung des Reglers $S$ verändert auch das verlinkte Streudiagramm der transformierten ($t$, $y^*$) Daten. Jetzt wird solange der Regler verändert, bis ein Minimalwert für die Abweichungsquadrate gefunden ist. Dieser Wert wird als Schätzwert für die Sättigungsgrenze gewählt. Aus der kleinsten-Quadrate Gerade, hier $y^*$=-0,0273 $t^*$ +47,38, und dem oben bestimmten Wert für $S$ lassen sich jetzt mittels Vergleich mit der Gleichung (2) Schätzwerte für $k$ und $y_0$ herleiten.

$$k = -\frac{-0{,}0273}{S} = 0{,}000085, \qquad y_0 = \frac{S}{1 + S\exp(-1{,}5)} = 4{,}43$$

Jetzt kann die eingepasste logistische Funktion in das Streudiagramm eingezeichnet und zur Modellvalidierung ein Residuenplot erstellt werden.




## Literatur:


Biehler, R., Hofmann, T., Maxara, C., Prömmel, A. (2006): *Fathom 2. Eine Einführung.* Springer

Lambacher Schweizer (2000): *LK Analysis*, Klett Verlag Ausgabe Baden Württemberg

Kohorst, Helmut& Portscheller, Philipp (1999): Vom exponentiellen zum logistischen Wachstum. Wozu Hefe nicht alles gut ist: *Mathematiklehren* 97

Hull, Joe & Langkamp, Greg (2001): Quantitative Environmental Learning Project. Online http://www.seattlecentral.org/qelp