

## 76 Variationsrechnung und Dirichlet-Probleme

**76.1 Randwertprobleme für die Poisson-Gleichung.** Es seien  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet und  $g : \partial\Omega \mapsto \mathbb{K}$  sowie  $f : \Omega \mapsto \mathbb{K}$  vorgegebene Funktionen. Man sucht dann eine Lösung  $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$  des Problems

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = g \text{ auf } \partial\Omega. \quad (1)$$

Hierbei kann  $u(x)$  die Auslenkung einer am Rand mittels  $g$  eingespannten Membran unter der Kraft  $f(x)$  (etwa Schwerkraft) sein oder auch eine stationäre Temperaturverteilung mit vorgegebener Randtemperatur  $g$  und Energiequelle  $f$ .

**76.2 Das Dirichletsche Prinzip.** a) Wir betrachten zunächst den Fall  $f = 0$ . Seit ca. 1840 wurde ein von B. Riemann nach *P.G.L.-Dirichlet* benanntes *Variationsprinzip* zur Lösung des *Dirichlet-Problems* 1 verwendet. Für  $\mathcal{C}^1$ -Funktionen auf dem beschränkten Gebiet  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  definiert man die *Dirichlet-Form*

$$D(u, v) := \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \partial_j u(x) \overline{\partial_j v(x)} d^n x \quad (2)$$

und sucht unter allen Funktionen  $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$  mit vorgegebenen Randwerten  $u|_{\partial\Omega} = g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$  eine solche mit *minimalem Dirichlet-Integral*  $D(u) := D(u, u)$ ; in obigem Modell ist etwa  $\frac{1}{2} D(u)$  die *innere Energie* der Membran.

b) Für *Testfunktionen*  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) =: \mathcal{D}(\Omega)$  gilt dann

$$D(u + t\varphi) = D(u) + 2 \operatorname{Re} \bar{t} D(u, \varphi) + |t|^2 D(\varphi) \geq D(u)$$

für alle  $t \in \mathbb{C}$ , also  $D(u, \varphi) = 0$ . Partielle Integration liefert dann

$$-\int_{\Omega} \Delta u(x) \varphi(x) d^n x = D(u, \bar{\varphi}) = 0$$

für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ . Daraus folgt dann  $\Delta u = 0$  in  $\Omega$  nach dem

**76.3 Satz (Fundamentallemma der Variationsrechnung).** *Es seien  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Menge, und für  $h \in L_1^{loc}(\Omega)$  gelte*

$$\int_{\Omega} h(x) \varphi(x) d^n x = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (3)$$

*Dann gilt  $h = 0$  (fast überall.)*

**76.4 Bemerkungen.** a) Die *Minimierung* eines *Funktional*s liefert also eine *Lösung einer Differentialgleichung!*

b) Die Existenz solcher Minima ist allerdings nicht ohne weiteres klar, da man in unendlichdimensionalen Räumen i. a. nicht mit Kompaktheits-Argumenten arbeiten kann. Im Jahre 1869 wies K. Weierstraß darauf hin, daß trotz  $D(u) \geq 0$  für alle  $u$  die Existenz einer Funktion  $u$  mit minimalem Dirichlet-Integral nicht gesichert ist; in der Tat gibt es bereits im Fall der Kreisscheibe  $K = K_1(0)$  in  $\mathbb{R}^2$  Randfunktionen  $g \in \mathcal{C}(\partial K)$ , für die die Lösung des Dirichlet-Problems (vgl. Theorem ?? unten) *kein endliches Dirichlet-Integral* besitzt.

c) Erst ab etwa 1900 wurde das Dirichletsche Prinzip von D. Hilbert, R. Courant

und anderen zu einer wirksamen Methode in der Variationsrechnung und der Theorie der Randwertprobleme ausgebaut; auf Variationsprinzipien beruht auch die Methode der *Finiten Elemente* zur *numerischen Berechnung* von Näherungslösungen. Dabei arbeitet man in geeigneten *Hilbert-Funktionenräumen*, da dann jede beschränkte Folge immerhin eine *schwach konvergente Teilfolge* besitzt. Man erhält allerdings i. a. nur

**76.5 Schwache Lösungen.** a) Nach dem Fundamentallemma 76.3 ist für eine Funktion  $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$  die Gleichung

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega \quad (4)$$

äquivalent zu

$$-\int_{\Omega} \Delta u(x) \varphi(x) d^n x = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) d^n x \text{ für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Partielle Integration liefert die weitere Äquivalenz

$$-\int_{\Omega} u(x) \Delta \varphi(x) d^n x = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) d^n x \text{ für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (5)$$

b) In (5) muß nun  $u$  nicht mehr differenzierbar sein! Für  $f \in L_2(\Omega)$  nennt man nun  $u \in L_2(\Omega)$  eine *schwache Lösung* von (4), wenn (5) gilt! Auch die Randbedingung in (1) kann analog *schwach* interpretiert werden.

c) Analog zu a) und b) definiert man auch *schwache erste partielle* Ableitungen und definiert den *Sobolev-Hilbertraum*

$$W^1(\Omega) := \{u \in L_2(\Omega) \mid \forall j \exists \partial_j u \in L_2(\Omega)\}. \quad (6)$$

d) Mit Hilbertraum-Methoden kann man nun zeigen, daß das auf  $W^1(\Omega)$  definierte Funktional

$$F(v) := \frac{1}{2} D(v) - \int_{\Omega} f v d^n x \quad (7)$$

unter der schwachen Randbedingung  $v|_{\partial\Omega} = g$  (für geeignete, z. B. stetig differenzierbare Randfunktionen  $g$ ) ein *Minimum*  $u \in W^1(\Omega)$  besitzt. Ähnlich wie in 76.2 b) folgt dann die Gültigkeit von (1) im schwachen Sinn.

e) Die bisherigen Überlegungen gelten für alle beschränkten Gebiete  $\Omega$ . Unter geeigneten *Glattheitsbedingungen* an den Rand läßt sich zeigen, daß die Lösung  $u \in W^1(\Omega)$  von (1) sogar in  $\mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$  liegt und dann eine *klassische Lösung* des Problems (1) ist.

Wir lösen nun das Dirichlet-Problem auf einer Kreisscheibe:

**76.6 Produktansatz in Polarkoordinaten.** a) Der Laplace-Operator in ebenen Polarkoordinaten lautet

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (8)$$

Ein Produktansatz  $u(r, \varphi) = f(r) g(\varphi)$  für Lösungen von  $\Delta u = 0$  liefert

$$g''(\varphi) + \lambda g(\varphi) = 0, \quad (9)$$

$$r^2 f''(r) + r f'(r) - \lambda f(r) = 0. \quad (10)$$

b) Da  $g$   $2\pi$ -periodisch sein muß, hat man für (9) die Eigenfunktionen  $e^{\pm ik\varphi}$  zu den Eigenwerten  $\lambda = k^2$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ .

c) Setzt man  $\lambda = k^2$  in (10) ein, so erhält man die Lösungen

$$f(r) = c + d \log r \quad \text{für } k = 0, \quad f(r) = c r^k + d r^{-k} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}. \quad (11)$$

Es sind also  $u(r, \varphi) = c + d \log r$  und  $u(r, \varphi) = (c r^k + d r^{-k}) e^{\pm ik\varphi}$  harmonische Funktionen auf Kreisringen.

**76.7 Poisson-Kern in der Ebene.** a) Auf Kreisen  $K = K_R(0)$  muß in (11)  $d = 0$  gelten. Zur Lösung des *Dirichlet-Problems* macht man den Ansatz

$$h(r, \varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k r^{|k|} e^{ik\varphi}; \quad (12)$$

die Randbedingung  $h(R, \varphi) = g(\varphi)$  liefert dann  $c_k R^{|k|} = \hat{g}(k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Es folgt

$$h(r, \varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{g}(k) \left(\frac{r}{R}\right)^{|k|} e^{ik\varphi}. \quad (13)$$

b) Für  $R = 1$  berechnet man weiter

$$h(r, \varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-ikt} dt r^{|k|} e^{ik\varphi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\varphi - t) g(t) dt \quad (14)$$

mit dem *Poisson-Kern*

$$P_r(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{iks} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos ks \quad (15)$$

$$= 1 + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{iks} = \operatorname{Re} \left( 1 + 2 \frac{r e^{is}}{1 - r e^{is}} \right) \quad (16)$$

$$= \operatorname{Re} \frac{1 + r e^{is}}{1 - r e^{is}} = \frac{1 - r^2}{|1 - r e^{is}|^2} \quad (17)$$

c) Es ist  $(P_r)$  eine *Dirac-Folge* für  $r \rightarrow 1$ . Es gilt

$$u(r e^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\varphi - t) u(e^{it}) dt \quad (18)$$

für jede auf  $\overline{K}$  stetige und in  $K$  harmonische Funktion  $u$ . Wegen (16) gilt dann  $u = \operatorname{Re} f$  für die in  $K$  holomorphe Funktion

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} u(e^{it}) dt, \quad z = r e^{i\varphi}. \quad (19)$$

**76.8 Lagrange-Funktionen.** a) Für *gewöhnliche Differentialgleichungen* ist die Existenzfrage wesentlich leichter zu beantworten als für partielle Differentialgleichungen. Gleichungen der klassischen Mechanik können allerdings auch aus *Variationsprinzipien* hergeleitet werden:

b) Es seien  $a < b \in \mathbb{R}$  und  $L \in \mathcal{C}^2([a, b] \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  gegeben. Gesucht werden lokale Extremalstellen des Funktionals

$$V : f \mapsto \int_a^b L(x, f(x), f'(x)) dx \quad (20)$$

auf der Funktionenmenge

$$E_{c,d} := \{f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R}) \mid f(a) = c, f(b) = d\}. \quad (21)$$

Es ist  $E_{c,d}$  ein affiner Unterraum von  $\mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$ . Mit  $(x, y, p)$  werden die Variablen in  $[a, b] \times \mathbb{R}^2$  bezeichnet.

**76.9 Satz.** Eine lokale Extremalstelle  $f \in E_{c,d}$  des Funktionals  $V$  erfüllt die Eulersche Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial p}(x, f(x), f'(x)) - \frac{\partial L}{\partial y}(x, f(x), f'(x)) = 0. \quad (22)$$

Der Beweis benutzt wieder das Fundamentallemma der Variationsrechnung.

**76.10 Beispiele und Bemerkungen.** a) Führt man die Differentiation in (22) aus, so erhält man

$$\partial_x \partial_p L + \partial_y \partial_p L f' + \partial_p^2 L f'' - \partial_y L = 0. \quad (23)$$

Hängt speziell  $L$  nicht von  $x$  ab, so ist  $\partial_x L = \partial_x \partial_p L = 0$ , und man erhält

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\partial_p L f' - L) &= \partial_y \partial_p L f'^2 + \partial_p^2 L f'' f' + \partial_p L f'' - \partial_y L f' - \partial_p L f'' \\ &= (\partial_y \partial_p L f' + \partial_p^2 L f'' - \partial_y L) f' = 0, \quad \text{also} \end{aligned}$$

$$\partial_p L(f(x), f'(x)) f'(x) - L(f(x), f'(x)) = C. \quad (24)$$

b) Unter allen Funktionen in  $E_{c,d}$  soll diejenige bestimmt werden, deren Graph minimale Länge hat. Mit  $L(x, y, p) := \sqrt{1 + p^2}$  ist diese Länge gerade durch  $V(g) = \int_a^b L(x, g(x), g'(x)) dx$  gegeben. Man hat  $\partial_p L = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$ ; für lokale Extremalstellen  $f$  von  $V$  gilt also

$$\frac{f'^2}{\sqrt{1+f'^2}} - \sqrt{1+f'^2} = C \Leftrightarrow C \sqrt{1+f'^2} = -1,$$

d. h. es muß  $f'$  konstant und somit  $f(x) = c + (d-c) \frac{x-a}{b-a}$  sein. In diesem einfachen Fall läßt sich leicht zeigen, daß  $V$  tatsächlich in  $f$  minimal wird.