Prof. Dr. W. Kaballo
Dr. J. Sawollek

Fakultät für Mathematik
TU Dortmund

6. Übungsblatt zu „Höhere Mathematik III (P/ET/IT/AI)“ Wintersemester 2009/10

Abgabetermin für die ersten beiden Aufgaben: Mittwoch, 25.11.09, 12.00 Uhr

Wichtige Begriffe: Integralsätze im Raum, Volumenformel, Tangenten- und Normaleneinheitsvektorfeld, orientierbare Fläche, Vektorpotential

Aufgabe 21: Es seien

$$M := \{(x,y,z) \mid x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = r\cos^2\varphi,\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$$

und $v(x,y,z) := (-y, x, 1)^T$.

a) Skizzieren Sie M.

b) Berechnen Sie $\int_{\partial M} \langle v, dx\rangle$ mit Hilfe des Satzes von Stokes. M ist dabei so orientiert, dass die z-Komponente des Normalenvektors positiv ist.

Aufgabe 22: Es seien

$$K := \{(x,y,z) \mid x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le z \le 1,\ 0 \le r \le 2 - z\}$$

und $v(x,y,z) := (y, -x, 2z)^T$.

a) Berechnen Sie die Gesamtoberfläche von K.

b) Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes v durch die Oberfläche von K mit einem geeigneten Integralsatz.

c) Berechnen Sie den Fluss von v durch den Kegelmantel, d.h. den Teil der Oberfläche, der durch $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le z \le 1$ und $r = 2 - z$ beschrieben wird.

Hinweis: Der Fluss eines Vektorfeldes v durch eine Fläche S ist $\int_S \langle v, n_a\rangle\, d\sigma$.

Aufgabe 23: Der Körper K werde in Zylinderkoordinaten durch $1 \le z < \infty$, $r = \frac{1}{z}$ beschrieben. Berechnen Sie Volumen und Oberfläche von K.

Aufgabe 24: Es seien

$$O := \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \ge 0\}$$

und $v(x,y,z) := (1,1,1)^T$.

a) Bestimmen Sie ein Vektorpotential zu v.

b) Berechnen Sie $\int_O \langle v, n\rangle\, d\sigma$ mit Hilfe des Satzes von Stokes.