Prof. Dr. W. Kaballo
Dr. J. Sawollek

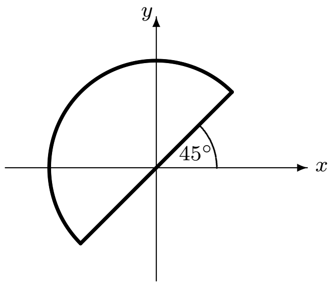
Fakultät für Mathematik
TU Dortmund

5. Übungsblatt zu „Höhere Mathematik III (P/ET/IT/AI)“
Wintersemester 2009/10

Abgabetermin für die ersten beiden Aufgaben: Mittwoch, 18.11.09, 12.00 Uhr

Wichtige Begriffe: Weg- und Kurvenintegrale skalarer Funktionen, Tangenten- und Normaleneinheitsvektor, Integralsätze, Flächenformel, Flächen im $\mathbb{R}^3$, Flächeninhalt

Aufgabe 17: Es sei $v(x,y) := (3y, x)^T$ auf $\mathbb{R}^2$ und C der Rand des skizzierten Halbkreises mit Radius r.



Geben Sie eine Parametrisierung γ von C an, so dass der Halbkreis in mathematisch positivem Sinn durchlaufen wird. Berechnen Sie dann $\int_\gamma \langle v, dx\rangle$ einmal direkt und einmal mit dem Integralsatz von Gauß

Aufgabe 18: Eine *Lemniskate* Γ ist gegeben durch

$$\Gamma \;:=\; \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left(\left(x - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 + y^2\right)\left(\left(x + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 + y^2\right) = \tfrac{1}{4}\right\}.$$

Berechnen Sie mit Hilfe der Flächenformel den Flächeninhalt des Innengebietes G der Teilmenge $\Gamma_0 := \Gamma \cap ([0,\infty) \times \mathbb{R})$.

Hinweis: Verwenden Sie Polarkoordinaten und rechnen Sie nach, dass $r = \sqrt{\cos(2\varphi)}$ mit $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ eine Parametrisierung von Γ_0 ergibt.

Aufgabe 19: Für ein Vektorfeld $v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ gelte $|v(x,y)| = o\left(\frac{1}{r}\right)$ für $r \to \infty$ sowie $\operatorname{div} v \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^2)$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{div} v(x,y)\, d^2(x,y) \;=\; 0$$

Aufgabe 20: Berechnen Sie die Flächeninhalte folgender 2-Flächen im $\mathbb{R}^3$.

a) $P = \{(x,y,z) \mid 0 \le x^2 + y^2 \le 1\,,\ z = x^2 + y^2\}$ (Paraboloid)

b) $S = \{(u\cos v, u\sin v, hv)^T \mid 0 \le u \le R\,,\ 0 \le v \le 2\pi\}$ mit $R, h > 0$ (Schraubenfläche)