

## 4. Übungsblatt zu „Höhere Mathematik III (P/ET/IT/AI)“ Wintersemester 2009/10

Abgabetermin für die ersten beiden Aufgaben: Mittwoch, 11.11.09, 12.00 Uhr

**Wichtige Begriffe:** Wegintegral, Potential, wirbelfrei, sternförmig, Divergenz, Rotation

**Aufgabe 13:** Es sei  $v(x, y) := (e^y, e^x)^T$  auf  $\mathbb{R}^2$  und  $\Delta$  der Rand des Dreiecks mit den Eckpunkten  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$  und  $(0, 1)$ . Geben Sie eine Parametrisierung  $\gamma$  von  $\Delta$  an, welche die angegebene Reihenfolge der Punkte berücksichtigt. Berechnen Sie dann  $\int_{\gamma} \langle v, dx \rangle$ .

**Aufgabe 14:** Untersuchen Sie, ob folgende Vektorfelder auf  $\mathbb{R}^2$  bzw.  $\mathbb{R}^3$  ein Potential besitzen, und berechnen Sie gegebenenfalls ein solches.

a)  $u(x, y) := (1 + \cos y e^{x \cos y}, -x \sin y e^{x \cos y})^T$

b)  $v(x, y, z) := (3x^2y^2z - y^3, 2x^3yz - 3xy^2 + z, x^3y^2 + y)^T$

**Aufgabe 15: a)** Zeigen Sie die folgenden Produktregeln.

$$\nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g) \quad \text{und} \quad \langle \nabla, fv \rangle = \langle \nabla f, v \rangle + f \langle \nabla, v \rangle$$

**b)** Formulieren und zeigen Sie Produktregeln für die Rotation.

**Aufgabe 16:** Zeigen Sie die Ungleichung

$$\left| \int_{\gamma} \langle v(x), dx \rangle \right| \leq \sup\{|v(x)| \mid x \in (\gamma)\} \cdot L(\gamma)$$

für Wege  $\gamma \in \mathcal{C}_{st}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$  und Vektorfelder  $v \in \mathcal{C}((\gamma), \mathbb{R}^n)$ .