

3. Übungsblatt zu „Höhere Mathematik III (P/ET/IT/AI)“ Wintersemester 2009/10

Abgabetermin für die ersten beiden Aufgaben: Mittwoch, 4.11.09, 12.00 Uhr

Wichtige Begriffe: Koordinatentransformation, Funktionaldeterminante, Polarkoordinaten, Zylinderkoordinaten, Kugelkoordinaten, Schwerpunkt, Gamma-Funktion

Aufgabe 9: Berechnen Sie die Schwerpunkte der folgenden Mengen.

a) $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2 \text{ und } y \geq 0\}$ mit $R > 0$

b) $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \text{ und } z \geq 0\}$ mit $R > 0$

Aufgabe 10: Berechnen Sie Volumen und Schwerpunkt des Kegels

$$K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 \text{ und } 0 \leq z \leq h\} \quad \text{mit } R, h > 0,$$

indem Sie K in Zylinderkoordinaten beschreiben.

Aufgabe 11: Es sei $\Psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ durch $\Psi(u, v) := (u(1-v), uv)^T$ definiert.

a) Berechnen Sie die Jacobi-Determinante $J\Psi$ und zeigen Sie, dass Ψ ein Diffeomorphismus von $(0, 1)^2$ auf das Dreieck $T := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0 \text{ und } x + y < 1\}$ ist.

b) Für $p, q \in \mathbb{R}$ definiere $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x, y) := x^{p-1}y^{q-1}(x+y)$. Zeigen Sie, dass f genau dann über T integrierbar ist, wenn $p > 0$ und $q > 0$ gilt.

Aufgabe 12: Beweisen Sie:

a) $\int_0^\infty t^z e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)$ für $\operatorname{Re} z > -1$

b) $\int_0^1 \left(\log \frac{1}{t}\right)^{z-1} dt = \Gamma(z)$ für $\operatorname{Re} z > 0$