

1. Übungsblatt zu „Höhere Mathematik III (P/ET/IT/AI)“ Wintersemester 2009/10

Abgabetermin für die ersten beiden Aufgaben: Mittwoch, 21.10.09, 12.00 Uhr

Aufgabe 1: Es sei P der Paraboloid

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2, z \leq 4\}.$$

- a) Skizzieren Sie P .
- b) Beschreiben Sie P in Zylinderkoordinaten.
- c) Geben Sie eine Parametrisierung der Randkurve von P an.

Aufgabe 2: Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei die Funktionenfolge $f_n(x) := n^\alpha x^n (1-x)$ auf $[0, 1]$ gegeben. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\|f_n\|_{\text{sup}} \rightarrow 0$, wann ist $(\|f_n\|_{\text{sup}})$ beschränkt, wann hat (f_n) eine \mathcal{L}_1 -Majorante, und wann gilt $\int_0^1 f_n(x) dx \rightarrow 0$? Begründen Sie ihre Behauptungen!

Hinweis: Bestimmen Sie das Maximum von f_n und zeigen Sie, dass $C(1-x)^{1-\alpha}$ für ein geeignetes $C > 0$ eine Majorante der (f_n) ist.

Aufgabe 3: Welche der folgenden Aussagen ist richtig, welche falsch? Begründen Sie ihre Behauptungen!

- a) $\frac{1}{|x|} \in L_1([-1, 1])$
- b) $\frac{1}{|(x, y)|} \in L_1([-1, 1]^2)$

Aufgabe 4: Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

- a) Zeigen Sie, dass aus $\lambda(\partial A) = 0$ folgt: A ist messbar mit $\lambda(A^\circ) = \lambda(A) = \lambda(\overline{A})$.
- b) Gilt die Umkehrung von Teil a)?