

49 Lokale Extrema

49.1 Definition. Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f : X \mapsto \mathbb{R}$ besitzt ein **lokales Maximum** [**Minimum**] in einem Punkt $a \in X$, falls es $\delta > 0$ mit

$$f(x) \leq f(a) \quad [f(x) \geq f(a)] \quad \text{für alle } x \in X \quad \text{mit } |x - a| < \delta \quad (1)$$

gibt. In diesem Fall heißt a lokale Maximalstelle bzw. Minimalstelle von f . Diese heißt isoliert, falls in (1) für $x \neq a$ stets $f(x) \neq f(a)$ gilt.

In diesem Abschnitt wird $X = D$ stets eine offene Menge in \mathbb{R}^n sein.

49.2 Satz. Es seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $a \in D$ eine lokale Extremalstelle von $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$. Dann folgt $Df(a) = 0$ (oder $\text{grad } f(a) = 0$).

BEWEIS. Die für $h \in \mathbb{R}^n$ nahe $0 \in \mathbb{R}$ definierte Funktion

$$t \mapsto \phi(t) := \phi_h(t) := f(a + th) \quad (2)$$

der einen reellen Veränderlichen t besitzt ein lokales Extremum in 0 , und aus Satz 17.9 folgt $\phi'_h(0) = 0$. Mit $h = e_j$ ergibt sich daraus $\partial_j f(a) = 0$ für $j = 1, \dots, n$. \diamond

Ein Punkt $a \in D$ heißt *kritischer Punkt* von f , falls $Df(a) = 0$ ist. Wie bei Funktionen von einer Veränderlichen müssen kritische Punkte von f nicht unbedingt Extremalstellen sein.

49.3 Beispiel. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ durch $f(x, y) = 2y^2 - x(x - 1)^2$ definiert. Dann gilt $Df(x, y) = (-3x^2 + 4x - 1, 4y)$. Aus $Df(x, y) = 0$ folgt sofort $y = 0$ und $-3x^2 + 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ oder $x = 1$. Eine Abbildung suggeriert, daß in $(\frac{1}{3}, 0)$ ein lokales Extremum vorliegen sollte, in dem kritischen Punkt $(1, 0)$ aber nicht. Diese Aussagen werden in Beispiel 49.6 a) in der Tat bewiesen.

49.4 Hesse-Formen. a) Es seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in \mathcal{C}^2(D, \mathbb{R})$. Für die Funktionen ϕ_h aus (2) gilt

$$\phi'_h(t) = Df(a + th) h = \sum_{j=1}^n \partial_j f(a + th) h_j \quad \text{und} \quad (3)$$

$$\phi''_h(t) = \sum_{i,j=1}^n \partial_i \partial_j f(a + th) h_i h_j \quad (4)$$

aufgrund der Kettenregel. Der letzte Ausdruck ähnelt einer *quadratischen Form* in h (vgl. Abschnitt 37); allerdings hängen die Koeffizienten von h (und t) ab.

b) Für $x \in D$ heißt $Hf(x) := (\partial_i \partial_j f(x))_{i,j=1 \dots n} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ die **Hesse-Matrix** von f in x , die durch $Hf(x)$ definierte quadratische Form

$$Q_{Hf(x)} : h \mapsto \langle h, Hf(x) h \rangle = \sum_{i,j=1}^n \partial_i \partial_j f(x) h_i h_j \quad (5)$$

die **Hesse-Form** von f in x . Wegen $f \in \mathcal{C}^2(D)$ und des Satzes von Schwarz sind die Hesse-Matrizen $Hf(x)$ *symmetrisch*.

c) Aus der *Taylor-Formel* mit *Lagrange-Restglied*

$$\phi_h(1) = \phi_h(0) + \phi'_h(0) + \frac{1}{2} \phi''_h(\theta) \quad (6)$$

für kleine $|h|$ und geeignete $\theta = \theta(h) \in [0, 1]$ ergibt sich mittels (3)–(5) sofort

$$f(a+h) = f(a) + Df(a)h + \frac{1}{2} \langle h, Hf(a+\theta h)h \rangle. \quad (7)$$

d) Ist nun speziell a ein kritischer Punkt von f , so gilt

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2} \langle h, Hf(a+\theta h)h \rangle, \quad \theta \in [0, 1]. \quad (8)$$

Die Frage, ob $f \in \mathcal{C}^2(D)$ in einem kritischen Punkt $a \in D$ ein lokales Extremum besitzt, wird also durch die *Vorzeichen der Hesse-Formen* $Q_{Hf(x)}$ für x nahe a entschieden.

e) Ist $Hf(a)$ *positiv [negativ] definit*, so gilt dies auch für $Hf(x)$ für alle x in der Nähe von a . Daraus ergibt sich:

49.5 Satz. *Es seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in \mathcal{C}^2(D, \mathbb{R})$, $a \in D$ ein kritischer Punkt von f und $A = Hf(a)$ die Hesse-Matrix von f in a . Dann gilt:*

- a) $A > 0 \Rightarrow f$ hat ein isoliertes lokales Minimum in a ,
- b) f hat ein lokales Minimum in $a \Rightarrow A \geq 0$,
- c) $A < 0 \Rightarrow f$ hat ein isoliertes lokales Maximum in a ,
- d) f hat ein lokales Maximum in $a \Rightarrow A \leq 0$,
- e) A indefinit $\Rightarrow f$ hat kein lokales Extremum in a .

49.6 Beispiele. a) Für die Funktion $f(x, y) = 2y^2 - x(x-1)^2$ aus Beispiel 49.3

gilt $Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 4-6x & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Im kritischen Punkt $(\frac{1}{3}, 0)$ ist $A = Hf(\frac{1}{3}, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, also $Q_A(h_1, h_2) = 2h_1^2 + 4h_2^2$, und man hat $Hf(\frac{1}{3}, 0) > 0$. Somit besitzt

f in $(\frac{1}{3}, 0)$ ein *isoliertes lokales Minimum*. Für $A = Hf(1, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ gilt $Q_A(h_1, h_2) = -2h_1^2 + 4h_2^2$. Offenbar ist $Q_A(1, 0)^\top < 0$ und $Q_A(0, 1)^\top > 0$, also $Hf(1, 0)$ *indefinit*; folglich hat f in $(1, 0)$ kein lokales Extremum.

b) Es werden die folgenden Funktionen $f_j : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ betrachtet:

$$f_1(x, y) = x^2 + y^4, \quad f_2(x, y) = x^2, \quad f_3(x, y) = x^2 - y^3.$$

In allen drei Fällen ist 0 ein kritischer Punkt und $A = Hf_j(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Wegen $Q_A(h) = 2h_1^2$ ist A positiv semidefinit, aber nicht definit. Analog zum Fall $f''(a) = 0$ bei Funktionen von einer Veränderlichen ist Satz 49.5 nicht anwendbar, und in der Tat hat f_1 ein isoliertes lokales Minimum, f_2 ein nicht isoliertes lokales Minimum, f_3 aber kein lokales Extremum in 0 .

Im nächsten Beispiel wird das *Hurwitz-Kriterium* 37.10 verwendet:

49.7 Beispiel. Es sollen alle lokalen Extrema der Funktion

$$f: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) := 6xy - 3y^2 - 2x^3 - yz^2,$$

bestimmt werden. Man hat $Df(x, y, z) = (6y - 6x^2, 6x - 6y - z^2, -2yz)$. Aus $Df(x, y, z) = 0$ folgt zunächst $yz = 0$. Ist $y = 0$, so folgt auch $x = 0$ und dann $z = 0$. Ist $z = 0$, so folgt $x = y$ und $6x - 6x^2 = 6x(1 - x) = 0$. Die kritischen Punkte von f sind also der Nullpunkt und $p := (1, 1, 0)$. Die Hesse-Matrizen sind gegeben durch

$$Hf(x, y, z) = \begin{pmatrix} -12x & 6 & 0 \\ 6 & -6 & -2z \\ 0 & -2z & -2y \end{pmatrix},$$

und in Punkten $q := (x, y, 0)$ ist

$$Hf(q)_1 = -12x, \quad \det Hf(q)_2 = 72x - 36, \quad \det Hf(q)_3 = -2y(72x - 36).$$

Insbesondere ist $\det Hf(0)_2 = -36 < 0$, $Hf(0)$ nach dem Hurwitz-Kriterium also indefinit, und f besitzt kein lokales Extremum im Nullpunkt. Andererseits ist $Hf(p)_1 = -12$, $\det Hf(p)_2 = +36$, $\det Hf(p)_3 = -72$; nach dem Hurwitz-Kriterium ist also $Hf(p)$ negativ definit, und in p liegt ein isoliertes lokales Maximum von f vor. \square

Es wird nun die allgemeine Taylor-Formel für Funktionen von mehreren Veränderlichen besprochen. Dazu werden *Multiindex-Notationen* verwendet:

49.8 Notationen. a) Tritt in der Ableitung k -ter Ordnung $\partial_{i_k} \cdots \partial_{i_1} f$ von $f \in \mathcal{C}^k(D)$ die Ableitung ∂_j genau α_j mal auf, so schreibt man

$$\partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f := \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} := \partial_{i_k} \cdots \partial_{i_1} f. \quad (9)$$

b) Man faßt nun die Indizes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ zu *Tupeln* oder *Multiindizes* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ zusammen und schreibt dann

$$\partial^\alpha f := \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f. \quad (10)$$

c) Weiter sei $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$ die Länge von α , und für ein Tupel $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ schreibt man

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}. \quad (11)$$

Ein *Polynom* P vom Grad $\leq d$ auf \mathbb{R}^n kann dann kurz so geschrieben werden:

$$P(x) = \sum_{|\alpha| \leq d} c_\alpha x^\alpha, \quad c_\alpha \in \mathbb{K}. \quad (12)$$

d) Schließlich sei $\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!$, und für $\beta \leq \alpha$, d. h. $\beta_j \leq \alpha_j$ für $j = 1, \dots, n$, setzt man

$$\binom{\alpha}{\beta} := \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{\alpha!}{\beta! (\alpha - \beta)!}. \quad (13)$$

Es seien nun $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in \mathcal{C}^{k+1}(D, \mathbb{R}^m)$. Für $[a, a+h] \subseteq D$ kann man mit Hilfe von (3) und (4) die höheren Ableitungen der Hilfsfunktion ϕ_h aus (2) berechnen und damit die *Taylor-Formel mit Lagrange-Restglied* erhalten:

49.9 Theorem (Taylor). *Es seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $a, a+h \in D$, so daß die Strecke $[a, a+h]$ in D liegt. Für $f \in \mathcal{C}^{k+1}(D, \mathbb{R}^m)$ gilt dann*

$$f(a+h) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\partial^\alpha f(a)}{\alpha!} h^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{\partial^\alpha f(a+\theta h)}{\alpha!} h^\alpha \quad (14)$$

für ein geeignetes $\theta \in [0, 1]$ (vgl. (7) für $k=1$).

49.10 Bemerkungen. Für $f \in \mathcal{C}^k(D, \mathbb{R}^m)$ heißt

$$T_k^a f(h) := \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\partial^\alpha f(a)}{\alpha!} h^\alpha \quad (15)$$

das *Taylor-Polynom* (in h) zu f vom Grad k in $a \in D$. Man hat die *qualitative Version*

$$f(a+h) = T_k^a f(h) + o(|h|^k) \quad (16)$$

der Taylor-Formel; das Taylor-Polynom approximiert also $f(a+h)$ nahe a bis auf einen Fehler der Ordnung $o(|h|^k)$ und ist auch *das einzige* Polynom vom Grad $\leq k$ mit dieser Eigenschaft.

50 Der Satz über implizite Funktionen

50.1 Implizit definierte Kurven. In diesem Abschnitt wird zunächst die *implizite Definition von Kurven* durch Gleichungen

$$f(x, y) = 0 \quad (1)$$

besprochen, wobei f eine \mathcal{C}^1 -Funktion auf einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ist. Die Lösungsmenge

$$S = N_0(f) = \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = 0\} \quad (2)$$

von (1) ist eine *Niveaumenge* von f und geometrisch der Schnitt des Graphen $\Gamma(f)$ von f mit der xy -Ebene. Natürlich kann $S = \emptyset$ (etwa für $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$) oder $S = D$ (für $f = 0$) sein; in „schönen“ Fällen aber ist S eine *Kurve* in D . Eine wesentliche Anwendung des folgenden *Satzes über implizite Funktionen* ist die Herleitung einer notwendigen Bedingung für *lokale Extrema* von auf S definierten *Funktionen*.

50.2 Beispiel. a) Die *Kreisgleichung*

$$f(x, y) := x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (3)$$

besitzt die folgenden beiden *Auflösungen nach y* :

$$\begin{aligned} y &= +\sqrt{1-x^2} && \text{für } y \geq 0, \\ y &= -\sqrt{1-x^2} && \text{für } y \leq 0. \end{aligned}$$

Ist insbesondere (a, b) eine feste Lösung von (3) mit $b > 0$, so gilt

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow y = +\sqrt{1-x^2} \quad \text{für } (x, y) \text{ nahe } (a, b),$$

d. h. in der Nähe von (a, b) hat (3) eine *eindeutige* Auflösung. Entsprechendes gilt für $b < 0$. Im Fall $b = 0$, also $a = \pm 1$, ist eine solche eindeutige Auflösung von (3) nach y nahe (a, b) offenbar *nicht möglich*, da für x nahe a und $x \neq a$ die Gleichung (3) *zwei* Lösungen y nahe $b = 0$ besitzt. Man beachte, daß die Ableitung $\partial_y f(a, b) = 2b$ von f nach y genau für $b = 0$ verschwindet.

b) Entsprechendes gilt für die Auflösung von (3) nach x ; diese ist nahe Punkten (a, b) auf der Kreislinie genau dann eindeutig möglich, wenn $a \neq 0$ ist, also genau dann, wenn $\partial_x f(a, b) = 2a \neq 0$ gilt.

Allgemein kann (1) in einer Umgebung einer Lösung $(a, b) \in D$ nach y aufgelöst werden, wenn $\partial_y f(a, b) \neq 0$ gilt. Dies gilt auch für den Fall *mehrerer* Veränderlicher x . Wir bezeichnen dann Tupel in \mathbb{R}^n mit $(x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$.

50.3 Satz über implizite Funktionen. *Es seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$ und $(a, b) \in D$ mit $f(a, b) = 0$, so daß $\partial_y f(a, b) \neq 0$ gilt. Dann gibt es eine offene Kugel V um a in \mathbb{R}^{n-1} und ein offenes Intervall I um b in \mathbb{R} mit $V \times I \subseteq D$, so daß für jedes $x \in V$ die Gleichung $f(x, y) = 0$ in I genau eine Lösung y besitzt. Die dadurch definierte Funktion $g : x \mapsto y$ von V nach I erfüllt $g(a) = b$ und ist \mathcal{C}^1 mit*

$$\partial_{x_j} g(x) = -\frac{\partial_{x_j} f(x, g(x))}{\partial_y f(x, g(x))}, \quad x \in V, \quad j = 1, \dots, n-1. \quad (4)$$

50.4 Bemerkungen. a) Der Satz über implizite Funktionen besagt also

$$\begin{aligned}\{(x, y) \in V \times I \mid f(x, y) = 0\} &= \{(x, y) \in V \times I \mid y = g(x)\} \\ &= \{(x, g(x)) \mid x \in V\};\end{aligned}$$

die *Niveaumenge* $S = N_0(f)$ ist also in $V \times I \subseteq D$ durch den Graphen einer \mathcal{C}^1 -Funktion $g: V \mapsto I$ gegeben: $S \cap (V \times I) = \Gamma(g)$.

b) In der Situation von Satz 50.3 kann es zu $x \in V$ weitere Lösungen $y \in \mathbb{R} \setminus I$ von $f(x, y) = 0$ geben, so etwa $y = -\sqrt{1-x^2}$ im Fall der Kreisgleichung (3) mit $b > 0$.

c) Für $f \in \mathcal{C}^k(D, \mathbb{R})$ ergibt sich aus (9) induktiv sofort auch $g \in \mathcal{C}^k(V, \mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

d) Es seien $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$ und $q \in D$ mit $f(q) = 0$ und $\text{grad } f(q) \neq 0$. Dann gibt es einen Index j mit $\partial_{x_j} f(q) \neq 0$, und die Gleichung $f(x, y) = 0$ läßt sich nahe q nach x_j auflösen.

50.5 Beispiele und Bemerkungen. a) Formel (9) drückt die *Ableitung* der Auflösung g durch x und g aus. Ist g nicht explizit bekannt, so liefert dies explizit nur den Wert $g'(a)$.

b) Im Fall $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ erhält man aus $\partial_x f = 2x$, $\partial_y f = 2y$ ohne explizite Berechnung von g sofort $g'(x) = -\frac{x}{y}$ (für $y \neq 0$); folglich ist 0 der einzige kritische Punkt von g .

c) Durch weitere Differentiation lassen sich aus (9) auch höhere (partielle) Ableitungen von g gewinnen. Im \mathcal{C}^2 -Fall hat man für $n = 2$

$$g''(x) = -\frac{\partial_x^2 f \cdot (\partial_y f)^2 - 2 \partial_{xy}^2 f \cdot \partial_x f \cdot \partial_y f + \partial_y^2 f \cdot (\partial_x f)^2}{(\partial_y f)^3}(x, g(x)). \quad (5)$$

50.6 Beispiel. a) Für die Funktion $f(x, y) := y^5 + (x^2 + 1)y + (x^3 - 4)$ gilt $\partial_y f(x, y) = 5y^4 + x^2 + 1 > 0$ auf \mathbb{R}^2 , woraus sich die Existenz einer *globalen* Auflösung $y = g(x)$ der Gleichung $f(x, y) = 0$ mit einer *algebraischen Funktion* $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ergibt. Eine explizite Angabe von g oder g' ist nicht (ohne weiteres) möglich.

b) Nach (9) hat man

$$g'(x) = -\frac{2xy + 3x^2}{5y^4 + x^2 + 1} = -\frac{2xg(x) + 3x^2}{5g(x)^4 + x^2 + 1}.$$

Für kritische Punkte von g gilt $x = 0$ oder $3x + 2y = 0$. Die Gleichung

$$h(x) := f(x, \frac{-3}{2}x) = -(\frac{3}{2})^5 x^5 - \frac{3}{2}x(x^2 + 1) + x^3 - 4 = 0$$

hat wegen

$$h'(x) = -5(\frac{3}{2})^5 x^4 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2} < 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

genau eine Lösung $x^* \in \mathbb{R}$. Wegen $h(-1) = (\frac{3}{2})^5 - 2 = \frac{179}{32} > 0$ und $h(0) = -4 < 0$ gilt $x^* \in (-1, 0)$, und das *Newton-Verfahren* liefert die Näherung $x^* = -0,80307$.

c) Wegen $f(0, 1) = -2 < 0$ und $f(0, 2) = 30 > 0$ gilt $a_0 := g(0) \in (1, 2)$. Eine weitere numerische Rechnung liefert nun die Näherung $a_0 = 1,22634$. Damit läßt

sich aus (5) auch der Wert $g''(0)$ berechnen. Man kann auch mit Hilfe eines *Ansatzes mit unbestimmten Koeffizienten* den Anfang der *Taylor-Reihe* von g in 0 bestimmen: Wegen $g'(0) = 0$ gilt etwa

$$g(x) = a_0 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + O(x^4).$$

Aus $f(x, g(x)) = 0$ ergibt sich dann

$$(a_0 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots)^5 + (x^2 + 1)(a_0 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots) + x^3 - 4 = 0.$$

Koeffizientenvergleich bei den Potenzen x^0, x^2 und x^3 liefert

$$\begin{aligned} a_0^5 + a_0 - 4 &= 0, \\ 5a_0^4 a_2 + a_0 + a_2 &= 0, \\ 5a_0^4 a_3 + a_3 + 1 &= 0, \end{aligned}$$

also $a_2 = -\frac{a_0}{5a_0^4 + 1} = -0,09963$, $a_3 = -\frac{1}{5a_0^4 + 1} = -0,08124$.

d) Insbesondere ist $g''(0) < 0$, und g hat in 0 ein isoliertes lokales Maximum. Wegen $g(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow -\infty$ muß g in x^* ein lokales Minimum besitzen. Natürlich kann man auch wie in c) direkt $g''(x^*) > 0$ zeigen.

50.7 Beispiele. a) Es werden normierte Polynome

$$P(x, y) := y^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j(x) y^j \quad (6)$$

mit Koeffizienten $a_j \in \mathcal{C}^k(D, \mathbb{R})$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, betrachtet. Hat $P(a, y)$ eine *einfache Nullstelle* in $b \in \mathbb{R}$, gilt also $P(a, b) = 0$ und $\partial_y P(a, b) \neq 0$, so liefert der Satz über implizite Funktionen Umgebungen $V \subseteq \mathbb{R}^n$ von a und $I \subseteq \mathbb{R}$ von b sowie eine Funktion $g \in \mathcal{C}^k(V, I)$, so daß $y = g(x)$ für $(x, y) \in V \times I$ die einzige Lösung der Gleichung $P(x, y) = 0$ ist. Hat insbesondere $P(a, y)$ genau m verschiedene reelle Nullstellen, so gilt dies auch für $P(x, y)$ für x nahe a .

b) Hat $P(a, y)$ eine *mehrfache* Nullstelle in $b \in \mathbb{R}$, so ist Satz 50.3 nicht anwendbar. Es sei etwa $p \geq 2$, $D = \mathbb{R}$ und $a(x) := \begin{cases} x^p & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$. Die Gleichung $P(x, y) := y^2 - a(x)y = 0$ hat dann für $x \leq 0$ nur die Lösung $y = 0$, für $x > 0$ aber die *zwei* Lösungen $y = 0$ und $y = x^p$. Im Nullpunkt tritt also eine *Verzweigung* der Lösung auf.

Satz 50.3 wird nun auf Gleichungssysteme verallgemeinert; dazu werden Tupel in \mathbb{R}^n mit $(x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m$ bezeichnet. Für eine Funktion $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^m)$ schreibt man die Funktionalmatrix in der Form

$$Df(x, y) = (D_x f(x, y), D_y f(x, y)) \quad \text{mit} \quad (7)$$

$$D_x f(x, y) := (\partial_{x_j} f_i(x, y))_{\substack{i=1 \dots m \\ j=1 \dots p}}, \quad D_y f(x, y) := (\partial_{y_j} f_i(x, y))_{\substack{i=1 \dots m \\ j=1 \dots m}}. \quad (8)$$

50.8 Satz (über implizite Abbildungen). *Es sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $1 \leq m < n \in \mathbb{N}$, $p := n - m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in \mathcal{C}^k(D, \mathbb{R}^m)$ und $(a, b) \in D$ mit $f(a, b) = 0$, so daß $D_y f(a, b)$ invertierbar ist (vgl. (8)). Dann gibt es offene Kugeln V_1 mit Zentrum a in \mathbb{R}^p und V_2 mit Zentrum b in \mathbb{R}^m mit $V_1 \times V_2 \subseteq D$, so daß für jedes $x \in V_1$ die Gleichung $f(x, y) = 0$ in V_2 genau eine Lösung y besitzt. Die dadurch definierte Funktion $g : x \mapsto y$ liegt in $\mathcal{C}^k(V_1, \mathbb{R}^m)$ und erfüllt $g(a) = b$, $g(V_1) \subseteq V_2$ sowie*

$$Dg(x) = -(D_y f(x, g(x)))^{-1} D_x f(x, g(x)), \quad x \in V_1. \quad (9)$$

Der BEWEIS benutzt Satz 50.3 und Induktion über m .

50.9 Bemerkungen. a) Analog zu 50.4 a) besagt Satz 50.8 also

$$\begin{aligned} \{(x, y) \in W_1 \times W_2 \mid f(x, y) = 0\} &= \{(x, y) \in W_1 \times W_2 \mid y = g(x)\} \\ &= \{(x, g(x)) \mid x \in W_1\}; \end{aligned}$$

die Niveaumenge $N_0(f)$ ist somit in $W_1 \times W_2 \subseteq D$ durch den Graphen einer \mathcal{C}^k -Funktion $g : W_1 \mapsto W_2$ gegeben: $N_0(f) \cap (W_1 \times W_2) = \Gamma(g)$.

b) Analog zu 50.4 b) kann es in der Situation von Satz 50.8 es zu $x \in W_1$ weitere Lösungen $y \in \mathbb{R}^m \setminus W_2$ von $f(x, y) = 0$ geben.

c) Es seien $f \in \mathcal{C}^k(D, \mathbb{R}^m)$ und $q \in D$ mit $f(q) = 0$ und $\text{rg } Df(q) = m$. Dann gibt es Indizes j_1, \dots, j_m , so daß $\{\partial_{j_1} f(q), \dots, \partial_{j_m} f(q)\}$ eine Basis von \mathbb{R}^m ist. Sind i_1, \dots, i_p die übrigen Indizes, so setzt man $x := (z_{i_1}, \dots, z_{i_p})$, $y := (z_{j_1}, \dots, z_{j_m})$ und erhält in einer Umgebung $W_1 \times W_2 \subseteq D$ von $q =: (a, b)$ eine Auflösung der Gleichung $f(x, y) = 0$ in der Form $y = g(x)$ mit einer eindeutig bestimmten \mathcal{C}^k -Funktion $g : W_1 \mapsto W_2$.

d) Eine allgemeinere Gleichung $f(z) = \xi$ schreibt man in der Form $f(z) - \xi = 0$ und betrachtet $(z, \xi) \in \mathbb{R}^{n+m}$ als Variable. Ist $f(q) - c = 0$ und $\text{rg } D_z f(q) = m$, so liefert Satz 50.8 wie in c) in einer Umgebung $W_1 \times W_2 \times W_3 \subseteq D \times \mathbb{R}^m$ von $(q, c) = (a, b, c)$ eine Auflösung der Gleichung $f(x, y) - \xi = 0$ in der Form $y = g(x, \xi)$ mit einer eindeutig bestimmten \mathcal{C}^k -Funktion $g : W_1 \times W_3 \mapsto W_2$.

Satz 50.8 impliziert das folgende Resultat zur *lokalen Umkehrung* von \mathcal{C}^k -Abbildungen:

50.10 Satz (über inverse Funktionen). *Es seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $1 \leq k \leq \infty$ und $f \in \mathcal{C}^k(D, \mathbb{R}^n)$, so daß die Ableitung $f'(a)$ für ein $a \in D$ invertierbar ist. Dann gibt es offene Mengen $U \subseteq D$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $a \in U$ und $b := f(a) \in V$, so daß $f : U \mapsto V$ bijektiv ist und die Umkehrabbildung $g : V \mapsto U$ ebenfalls \mathcal{C}^k ist.*

50.11 Beispiele und Bemerkungen. a) Eine bijektive \mathcal{C}^k -Abbildung $f : U \mapsto V$ mit \mathcal{C}^k -Umkehrabbildung $g : V \mapsto U$ heißt \mathcal{C}^k -Diffeomorphismus, \mathcal{C}^k -Isomorphismus oder \mathcal{C}^k -Koordinatentransformation.

b) In der Situation von Satz 50.10 gilt aufgrund der Kettenregel

$$g'(b) = f'(a)^{-1}. \quad (10)$$

c) Es sei $n = 1$ und $D \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Ist dann $f \in \mathcal{C}^k(D, \mathbb{R})$ und $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so ist $f' > 0$ oder $f' < 0$ auf D , f also *streng monoton* und somit *injektiv*. Es ist $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, und $f : D \mapsto f(D)$ hat

eine globale \mathcal{C}^k -Umkehrfunktion $g : f(D) \mapsto D$.

d) Die Aussage in c) ist im Fall $n > 1$ *nicht* richtig: Der komplexen Exponentialfunktion entspricht die Abbildung

$$g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)^\top$$

Wegen der Periodizität $g(x, y + 2\pi) = g(x, y)$ ist g *nicht injektiv*, obwohl für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$\det Dg(x, y) = \det \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} = e^{2x} > 0.$$

50.12 Kugelkoordinaten im Raum \mathbb{R}^3 . Für $q := (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ hat man zunächst den Radius $r = |q| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Im Fall $q \neq 0$ gibt es genau ein $\vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ mit $z = r \sin \vartheta$; der Winkel ϑ ist der *Breitengrad* des Punktes q auf der *Sphäre* $S_r(0)$. Es folgt dann $x^2 + y^2 = r^2 - z^2 = r^2 \cos^2 \vartheta$; schreibt man jetzt (x, y) in ebenen Polarkoordinaten, so ergibt sich

$$(x, y, z) = \Psi(r, \varphi, \vartheta) := (r \cos \varphi \cos \vartheta, r \sin \varphi \cos \vartheta, r \sin \vartheta). \quad (11)$$

Hierbei ist der Winkel φ der *Längengrad* des Punktes q auf der *Sphäre* $S_r(0)$. Für die in (11) definierte Abbildung $\Psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ gilt

$$D\Psi(r, \varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta & -r \sin \varphi \cos \vartheta & -r \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta & r \cos \varphi \cos \vartheta & -r \sin \varphi \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & 0 & r \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$\det D\Psi(r, \varphi, \vartheta) = r^2 \cos \vartheta; \quad (13)$$

nach dem Satz über inverse Funktionen ist also Ψ ein lokaler \mathcal{C}^∞ -Diffeomorphismus auf $\{(r, \varphi, \vartheta) \in \mathbb{R}^3 \mid r \cos \vartheta \neq 0\}$, dort wegen der 2π -Periodizität in φ und ϑ aber nicht injektiv. Es ist aber Ψ eine \mathcal{C}^∞ -Koordinatentransformation etwa von

$$U := (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \mid x \leq 0, z \in \mathbb{R}\}.$$

50.13 Beispiel. Es seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $1 \leq k \leq \infty$ und $f \in \mathcal{C}^k(D, \mathbb{R})$ mit $f(a) = 0$ und $Df(a) \neq 0$ für ein $a \in D$. Ist etwa $\partial_1 f(a) \neq 0$, so gilt für die durch

$$\Phi : x \mapsto (f(x), x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n)^\top$$

definierte Abbildung $\Phi \in \mathcal{C}^k(D, \mathbb{R}^n)$ offenbar $\det D\Phi(a) = \partial_1 f(a) \neq 0$. Nach Theorem 50.10 ist somit $\Phi : V \mapsto U$ ein \mathcal{C}^k -Diffeomorphismus einer offenen Umgebung $V \subseteq D$ von a auf eine offene Umgebung U von $0 \in \mathbb{R}^n$. Mit $\Psi := \Phi^{-1} : U \mapsto V$ ist dann $f \circ \Psi$ die erste Komponente von $\Phi \circ \Psi = I$; es gilt also

$$(f \circ \Psi)(u) = u_1, \quad u \in U, \quad (14)$$

für die \mathcal{C}^k -Koordinatentransformation $\Psi : U \mapsto V$.

In der Nähe gewisser *kritischer* Punkte kann f in ein einfaches *quadratisches Polynom* transformiert werden:

50.14 Satz (Morse-Lemma). *Es seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $3 \leq k \leq \infty$ und $f \in C^k(D, \mathbb{R})$ mit $f(a) = 0$ und $Df(a) = 0$ für ein $a \in D$. Ist die Hesse-Matrix $Hf(a)$ regulär, so gibt es eine C^{k-2} -Koordinatentransformation $\Psi : U \mapsto V$ einer offenen Umgebung U von $0 \in \mathbb{R}^n$ auf eine offene Umgebung $V \subseteq D$ von a mit $\Psi(0) = a$ und*

$$f(\Psi(u)) = u_1^2 + \cdots + u_d^2 - u_{d+1}^2 - \cdots - u_n^2, \quad u \in U; \quad (15)$$

hierbei ist $d \in \{0, \dots, n\}$ die Anzahl der positiven Eigenwerte von $Hf(a)$.

50.15 Beispiele und Bemerkungen. a) Aus (15) folgt sofort, daß im Fall $d = n$ bzw. $d = 0$ die Funktion f in a ein isoliertes lokales Minimum bzw. Maximum besitzt, im Fall $0 < d < n$ aber kein lokales Extremum (vgl. Satz 49.5).

b) In der Situation des Morse-Lemmas ist a eine *Singularität* der *Niveau-Menge* $N_0(f)$, die wegen der Regularität von $Hf(a)$ ebenfalls *regulär* genannt wird. Das Morse-Lemma liefert also eine *Klassifikation* der regulären Singularitäten durch den *Index* d der Hesse-Form.

c) Offenbar bedeutet Regularität genau $\Delta(a) := \det Hf(a) \neq 0$. Im Fall $n = 2$ ist $\Delta(a) > 0$ äquivalent zu $d = 2$ oder $d = 0$; dann hat also f ein isoliertes lokales Extremum in a , und a ist ein *isolierter Punkt* von $N_0(f)$. Für die Funktion $f(x, y) = 2y^2 - x(x-1)^2$ aus Beispiel 49.6 a) ist dies im Punkt $a = (\frac{1}{3}, 0)$ der Fall. Der Fall $\Delta(a) < 0$ ist äquivalent zu $d = 1$. Nach dem Morse-Lemma gibt es dann eine Koordinatentransformation Ψ mit

$$f(\Psi(\xi, \eta)) = \xi^2 - \eta^2. \quad (16)$$

Die Gleichung $\xi^2 - \eta^2 = 0$ beschreibt zwei sich in 0 schneidende Geraden, und daher besteht die Niveaulinie $N_0(f)$ nahe a aus zwei sich in a schneidenden Bahnen glatter Wege. Beispiele für diese Situation sind etwa der Nullpunkt bei einer Lemniskate oder bei einem Cartesischen Blatt.

d) Auf die Untersuchung nicht regulärer Singularitäten kann hier nicht eingegangen werden. Im Fall ebener Kurven sind auch andere Singularitäten als die in c) besprochenen möglich; so hat etwa die durch

$$f(x, y) := x^3 - y^2$$

gegebene *Neilsche Parabel* eine *Spitze* im Nullpunkt. Im Fall der in Polarkoordinaten durch

$$f(\Psi(r, \varphi)) = r^m \sin m\varphi$$

gegebenen Funktion f besteht $N_0(f)$ aus m sich in 0 schneidenden Geraden; für $m = 3$ etwa wird der Graph von $f(x, y) = 3x^2y - y^3$ ein „*Affensattel*“ genannt.