48 Parameterabhängige Integrale und höhere Ableitungen

48.1 Parameterabhängige Integrale. Es seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : X \times [a,b] \mapsto \mathbb{K}$ eine *stetige* Funktion. Durch

$$F(x) := \int_a^b f(x,y)\,dy\,, \quad x \in X\,, \tag{1}$$

wird dann eine Funktion $F : X \mapsto \mathbb{K}$ definiert. Diese Funktion $F : X \mapsto \mathbb{K}$ ist *stetig.*

Unter geeigneten Bedingungen kann die *Reihenfolge* der *Differentiation nach einer Variablen* und die der *Integration nach einer anderen Variablen vertauscht* werden. Als Konsequenz daraus wird sich auch ergeben, daß die *Reihenfolge* von *Differentiationen nach verschiedenen Variablen vertauscht* werden kann (vgl. Theorem 48.7).

48.2 Theorem. *Es seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \times [a,b] \mapsto \mathbb{K}$ eine stetige Funktion, so daß auch die partielle Ableitung $\partial_{x_j} f$ auf $D \times [a,b]$ existiert und dort stetig ist. Die in (1) definierte Funktion $F : D \mapsto \mathbb{K}$ ist dann nach x_j partiell differenzierbar, und es gilt*

$$\partial_{x_j} F(x) \;=\; \int_a^b \partial_{x_j} f(x,y)\,dy\,, \quad x \in D\,. \tag{2}$$

Nach (2) und 48.1 ist die Funktion $\partial_{x_j} F$ stetig auf D.

48.3 Beispiel. Für das parameterabhängige Integral

$$F(x) := \int_0^1 \frac{e^{-(1+y^2)x^2}}{1+y^2}\,dy\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

gilt nach Theorem 48.2

$$\begin{aligned} F'(x) \;&=\; \int_0^1 -2x\,(1+y^2)\,\frac{e^{-(1+y^2)x^2}}{1+y^2}\,dy \\ &=\; -2\int_0^1 x\,e^{-(1+y^2)x^2}\,dy \;=\; -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\,du\,. \end{aligned}$$

Für $G(x) := (\int_0^x e^{-u^2}\,du)^2$ andererseits gilt $G'(x) = 2\int_0^x e^{-u^2}\,du \cdot e^{-x^2}$; man hat also $(F+G)' = 0$, und somit ist $F + G = C$ konstant. Mit $x = 0$ erhält man $C = F(0) = \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. Somit gilt

$$(\int_0^x e^{-u^2}\,du)^2 \;=\; \tfrac{\pi}{4} - F(x)\,,$$

und wegen $0 \le F(x) \le e^{-x^2}$ folgt mit $x \to +\infty$ sofort $(\int_0^\infty e^{-u^2}\,du)^2 = \frac{\pi}{4}$, also das für Analysis und Wahrscheinlichkeitstheorie wichtige Ergebnis

$$\int_0^\infty e^{-u^2}\,du \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,. \tag{3}$$

48.4 Parameterabhängige Integrale mit variablen Grenzen. Es seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in \mathcal{C}^1(D \times (a,b))$ und $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$ mit $a < \varphi(x) \le \psi(x) < b$ für $x \in D$. Die Funktion

$$F : D \mapsto \mathbb{K}\,, \quad F(x) := \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\,. \tag{4}$$

wird nun differenziert. Mit

$$G : D \times (a,b)^2 \mapsto \mathbb{K}\,, \quad G(x,u,v) := \int_u^v f(x,y)\,dy\,, \tag{5}$$

gilt offenbar $F(x) = G(x, \varphi(x), \psi(x))$. Nach Theorem 48.2 und dem Hauptsatz ist $G \in \mathcal{C}^1(D \times (a,b)^2)$, und die Kettenregel liefert

$$\begin{aligned} \partial_{x_j} F(x) &= \partial_{x_j} G(x, \varphi(x), \psi(x)) + \partial_u G(x, \varphi(x), \psi(x))\, \partial_{x_j} \varphi(x) \\ &\quad + \partial_v G(x, \varphi(x), \psi(x))\, \partial_{x_j} \psi(x) \\ &= \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \partial_{x_j} f(x,y)\,dy + f(x, \psi(x))\, \partial_{x_j} \psi(x) - f(x, \varphi(x))\, \partial_{x_j} \varphi(x)\,. \end{aligned} \tag{6}$$

48.5 Höhere Ableitungen. Für $k \in \mathbb{N}$ und offene Mengen $D \subseteq \mathbb{R}^n$ wird rekursiv

$$\mathcal{C}^k(D, \mathbb{R}^m) := \{ f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^m) \mid \partial_j f \in \mathcal{C}^{k-1}(D, \mathbb{R}^m) \text{ für } j = 1, \ldots, n \}$$

definiert; weiter sei $\mathcal{C}^\infty(D, \mathbb{R}^m) := \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \mathcal{C}^k(D, \mathbb{R}^m)$. Für $f \in \mathcal{C}^k(D, \mathbb{R}^m)$ existieren also alle partiellen Ableitungen $\partial_{j_\ell} \cdots \partial_{j_1} f$ der *Ordnung* $\ell \le k$ stetig auf D.

48.6 Harmonische Funktionen. a) Für $f \in \mathcal{C}^2(0, \infty)$ betrachten wir die *rotationssymmetrische* Funktion $f(r) = (f \circ r)(x)$. Nach (47.7) gilt für $x \ne 0$

$$\begin{aligned} \partial_j^2 (f \circ r) &= \partial_j \frac{f'(r)}{r} x_j = \frac{f'(r)}{r} + \frac{r f''(r) - f'(r)}{r^2} \frac{x_j}{r} x_j \\ &= \frac{f'(r)}{r} + (f''(r) - \frac{f'(r)}{r}) \frac{x_j^2}{r^2}\,, \end{aligned}$$

und Summation über j liefert

$$\Delta(f \circ r) := \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 (f \circ r) = f''(r) + \tfrac{n-1}{r} f'(r)\,. \tag{7}$$

b) Der Differentialoperator $\Delta := \sum\limits_{j=1}^{n} \partial_j^2$ heißt *Laplace-Operator*. Lösungen $f \in \mathcal{C}^2(D)$ der *partiellen Differentialgleichung* $\Delta f = 0$ auf einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißen *harmonische Funktionen* auf D.

c) Nach (7) ist $f \circ r$ genau dann harmonisch auf $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, wenn die Funktion $g(r) := f'(r)$ die *gewöhnliche Differentialgleichung*

$$g'(r) + \tfrac{n-1}{r} g(r) = 0\,, \quad r > 0\,, \tag{8}$$

erfüllt. Wegen $\int \frac{n-1}{r}\,dr = (n-1)\log r$ ist nach 40.1

$$g(r) = C \exp\left(-(n-1)\log r\right) = C\, r^{1-n}$$

die allgemeine Lösung von (8); folglich sind alle rotationssymmetrischen harmonischen Funktionen auf $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ gegeben durch

$$f(r) = \begin{cases} C\, r^{2-n} + C^* &, \quad n \ge 3 \\ C \log r + C^* &, \quad n = 2 \end{cases}\,. \tag{9}$$

Sie besitzen *Singularitäten* im Nullpunkt. Für $C^* = 0$ und geeignete Konstanten C heißen diese Funktionen *Fundamentallösungen* von Δ.

48.7 Theorem (Schwarz). *Es seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^m)$, so daß $\partial_i \partial_j f$ auf D existiert und stetig ist. Dann existiert auch $\partial_j \partial_i f$ stetig auf D, und es gilt $\partial_j \partial_i f = \partial_i \partial_j f$.*

48.8 Bemerkungen. a) Für $f \in \mathcal{C}^k(D, \mathbb{R}^m)$, kommt es also bei k-fachen Ableitungen auf die Reihenfolge der Differentiationen nicht an.

b) Der Satz von Schwarz ist ohne die Stetigkeitsbedingung an $\partial_i \partial_j f$ i. a. nicht richtig; für $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$ impliziert selbst die Existenz der *beiden* gemischten partiellen Ableitungen ihre Gleichheit nicht. Dagegen *folgt* $\partial_j \partial_i f(a) = \partial_i \partial_j f(a)$ aus der *totalen Differenzierbarkeit* von $\partial_i f$ und $\partial_j f$ in a.

49 Lokale Extrema

49.1 Definition. *Es sei* $X \subseteq \mathbb{R}^n$. *Eine Funktion* $f : X \mapsto \mathbb{R}$ *besitzt ein* **lokales Maximum [Minimum]** *in einem Punkt* $a \in X$, *falls es* $\delta > 0$ *mit*

$$f(x) \leq f(a) \quad [f(x) \geq f(a)] \quad \textit{für alle} \;\; x \in X \quad \textit{mit} \;\; |\, x - a \,| < \delta \tag{1}$$

gibt. In diesem Fall heißt a lokale Maximalstelle bzw. Minimalstelle *von* f. *Diese heißt* isoliert, *falls in (1) für* $x \neq a$ *stets* $f(x) \neq f(a)$ *gilt.*

In diesem Abschnitt wird $X = D$ stets eine *offene* Menge in $\mathbb{R}^n$ sein.

49.2 Satz. *Es seien* $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen und* $a \in D$ *eine lokale Extremalstelle von* $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$. *Dann folgt* $Df(a) = 0$ *(oder* $\operatorname{grad} f(a) = 0$ *).*

Beweis. Die für $h \in \mathbb{R}^n$ nahe $0 \in \mathbb{R}$ definierte Funktion

$$t \mapsto \phi(t) := \; \phi_h(t) := \; f(a + th) \tag{2}$$

der einen reellen Veränderlichen t besitzt ein lokales Extremum in 0, und aus Satz 17.9 folgt $\phi_h'(0) = 0$. Mit $h = e_j$ ergibt sich daraus $\partial_j f(a) = 0$ für $j = 1, \ldots, n$. ◇

Ein Punkt $a \in D$ heißt *kritischer Punkt* von f, falls $Df(a) = 0$ ist. Wie bei Funktionen von einer Veränderlichen müssen kritische Punkte von f nicht unbedingt Extremalstellen sein.

49.3 Beispiel. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ durch $f(x, y) = 2y^2 - x(x-1)^2$ definiert. Dann gilt $Df(x, y) = (-3x^2 + 4x - 1, 4y)$. Aus $Df(x, y) = 0$ folgt sofort $y = 0$ und $-3x^2 + 4x - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{3}$ oder $x = 1$. Eine Abbildung suggeriert, daß in $(\frac{1}{3}, 0)$ ein lokales Extremum vorliegen sollte, in dem kritischen Punkt $(1, 0)$ aber nicht. Diese Aussagen werden in Beispiel 49.6 a) in der Tat bewiesen.

49.4 Hesse-Formen. a) Es seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in \mathcal{C}^2(D, \mathbb{R})$. Für die Funktionen ϕ_h aus (2) gilt

$$\phi_h'(t) \;=\; Df(a + th)\, h \;=\; \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(a + th)\, h_j \quad \text{und} \tag{3}$$

$$\phi_h''(t) \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \partial_j f(a + th)\, h_i\, h_j \tag{4}$$

aufgrund der Kettenregel. Der letzte Ausdruck ähnelt einer *quadratischen Form* in h (vgl. Abschnitt 37); allerdings hängen die Koeffizienten von h (und t) ab.

b) Für $x \in D$ heißt $Hf(x) := (\partial_i \partial_j f(x))_{i,j=1\ldots n} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ die **Hesse-Matrix** von f in x, die durch $Hf(x)$ definierte quadratische Form

$$Q_{Hf(x)} : h \mapsto \langle\, h \,,\, Hf(x)\, h \,\rangle \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \partial_j f(x)\, h_i\, h_j \tag{5}$$

die **Hesse-Form** von f in x. Wegen $f \in \mathcal{C}^2(D)$ und des Satzes von Schwarz sind die Hesse-Matrizen $Hf(x)$ *symmetrisch.*

c) Aus der *Taylor-Formel* mit *Lagrange-Restglied*

$$\phi_h(1) \;=\; \phi_h(0) + \phi_h'(0) + \tfrac{1}{2}\,\phi_h''(\theta) \tag{6}$$

für kleine $|\,h\,|$ und geeignete $\theta = \theta(h) \in [0,1]$ ergibt sich mittels (3)–(5) sofort

$$f(a+h) \;=\; f(a) + Df(a)\,h + \tfrac{1}{2}\,\langle\, h\,,\, Hf(a+\theta h)\,h\,\rangle\,. \tag{7}$$

d) Ist nun speziell a ein kritischer Punkt von f, so gilt

$$f(a+h) - f(a) \;=\; \tfrac{1}{2}\,\langle\, h\,,\, Hf(a+\theta h)\,h\,\rangle\,, \quad \theta \in [0,1]\,. \tag{8}$$

Die Frage, ob $f \in \mathcal{C}^2(D)$ in einem kritischen Punkt $a \in D$ ein lokales Extremum besitzt, wird also durch die *Vorzeichen der Hesse-Formen* $Q_{Hf(x)}$ für x nahe a entschieden.

e) Ist $Hf(a)$ *positiv [negativ] definit,* so gilt dies auch für $Hf(x)$ für alle x in der Nähe von a. Daraus ergibt sich:

49.5 Satz. *Es seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in \mathcal{C}^2(D,\mathbb{R})$, $a \in D$ ein kritischer Punkt von f und $A = Hf(a)$ die Hesse-Matrix von f in a. Dann gilt:*

a) $A > 0 \;\Rightarrow\; f$ hat ein isoliertes lokales Minimum in a,

b) f hat ein lokales Minimum in $a \;\Rightarrow\; A \geq 0$,

c) $A < 0 \;\Rightarrow\; f$ hat ein isoliertes lokales Maximum in a,

d) f hat ein lokales Maximum in $a \;\Rightarrow\; A \leq 0$,

e) A indefinit $\;\Rightarrow\; f$ hat kein lokales Extremum in a.

49.6 Beispiele. a) Für die Funktion $f(x,y) = 2y^2 - x(x-1)^2$ aus Beispiel 49.3 gilt $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 4-6x & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Im kritischen Punkt $(\frac{1}{3},0)$ ist $A = Hf(\frac{1}{3},0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, also $Q_A(h_1,h_2) = 2h_1^2 + 4h_2^2$, und man hat $Hf(\frac{1}{3},0) > 0$. Somit besitzt f in $(\frac{1}{3},0)$ ein *isoliertes lokales Minimum.* Für $A = Hf(1,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ gilt $Q_A(h_1,h_2) = -2h_1^2 + 4h_2^2$. Offenbar ist $Q_A(1,0)^\top < 0$ und $Q_A(0,1)^\top > 0$, also $Hf(1,0)$ *indefinit*; folglich hat f in $(1,0)$ kein lokales Extremum.

b) Es werden die folgenden Funktionen $f_j : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ betrachtet:

$$f_1(x,y) = x^2 + y^4\,, \quad f_2(x,y) = x^2\,, \quad f_3(x,y) = x^2 - y^3\,.$$

In allen drei Fällen ist 0 ein kritischer Punkt und $A = Hf_j(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Wegen $Q_A(h) = 2h_1^2$ ist A positiv semidefinit, aber nicht definit. Analog zum Fall $f''(a) = 0$ bei Funktionen von einer Veränderlichen ist Satz 49.5 nicht anwendbar, und in der Tat hat f_1 ein isoliertes lokales Minimum, f_2 ein nicht isoliertes lokales Minimum, f_3 aber kein lokales Extremum in 0.

Im nächsten Beispiel wird das *Hurwitz-Kriterium* 37.10 verwendet: