

42 Klassische Mechanik

42.1 Energiesatz. a) Es seien $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $x(t) \in J$ der Ort eines Punktes mit Masse $m > 0$ zur Zeit $t \in I \subseteq \mathbb{R}$; wirkt auf diesen ein *Kraftfeld* $f \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$, so gilt die *Bewegungsgleichung*

$$m \ddot{x} = f(x). \quad (1)$$

b) Es ist (1) äquivalent zu dem *System erster Ordnung*

$$\dot{x} = \frac{1}{m} y, \quad \dot{y} = f(x); \quad (2)$$

hierbei ist $y = m\dot{x}$ der *Impuls* des Massenpunktes. Die Bahnkurven von Lösungen von (2) in der xy -Ebene $j \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ („*Phasenebene*“) bilden das *Phasenportrait* von (2) oder (1).

c) Mit einer Stammfunktion (*Potenzial*) $U \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ von $-f$ ist die *Energie*

$$E(x, \dot{x}) := \frac{m}{2} \dot{x}^2 + U(x) \quad (3)$$

entlang der Lösungen $x = \varphi(t)$ von (2) konstant (*Energieerhaltungssatz*). In der Tat gilt

$$\frac{d}{dt} E(\varphi(t), \dot{\varphi}(t)) = m \dot{\varphi}(t) \ddot{\varphi}(t) + U'(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) = 0.$$

42.2 Lösung von (1). a) Die Energie (3) wird durch *Anfangswerte* $x(\tau) = x_0$ für die Lage und $\dot{x}(\tau) = v_0$ für die Geschwindigkeit festgelegt:

$$E = \frac{m}{2} v_0^2 + U(x_0); \quad (4)$$

im Fall $v_0 \neq 0$ ist dann (3) nahe (τ, x_0) äquivalent zu der Differentialgleichung mit getrennten Variablen

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}, \quad (5)$$

wobei das Vorzeichen durch das von v_0 festgelegt wird. Für $v_0 > 0$ etwa gibt es nach Satz 41.4 genau eine nahe τ definierte Lösung φ von (5) mit diesen Anfangswerten, und für diese gilt

$$t - \tau = \int_{x_0}^{\varphi(t)} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(\xi))}}. \quad (6)$$

Es ist dann φ die Lösung von (1) mit $x(\tau) = x_0$ und $\dot{x}(\tau) = v_0$; wegen $\dot{\varphi}(t) \neq 0$ folgt dies aus $\frac{m}{2} \dot{\varphi}(t)^2 + U(\varphi(t)) = E$ mittels Differentiation (vgl. 42.1 c)).

b) Im Fall $v_0 = 0$ gilt $E - U(x_0) = 0$. Dann hat (5) die stationäre Lösung $\varphi(t) = x_0$, die aber nur im Fall $f(x_0) = 0$ auch (1) erfüllt. Andernfalls gilt $U'(x_0) = -f(x_0) \neq 0$, und U ist nahe x_0 streng monoton. Folglich ist $E - U(x) > 0$ auf einem Intervall $[x_0, x_1]$ oder $[x_2, x_0]$, auf dem dann (5) zu untersuchen ist. Wegen

$$E - U(\xi) = -U'(x_0)(\xi - x_0) + o(|\xi - x_0|)$$

existiert das uneigentliche Integral

$$G(x) := \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(\xi))}}$$

auf $[x_0, x_1]$ oder $[x_2, x_0]$, und aus $G(x) = \pm(t - \tau)$ kann die Lösung $x = \varphi(t)$ berechnet werden. Offenbar ist x_0 ein lokales Extremum von φ , also ein „symmetrischer Umkehrpunkt“ der Bewegung.

42.3 Raketenflug. a) Eine Rakete wird von der Erdoberfläche mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 > 0$ nach oben geschossen. Bezeichnet $x(t) > 0$ die Höhe über dem Erdmittelpunkt, so liefert Newtons Gravitationsgesetz die Gleichung

$$m \ddot{x} = -\gamma \frac{Mm}{x^2}, \quad x(0) = R, \quad \dot{x}(0) = v_0, \quad (7)$$

wobei $m > 0$ die Masse der Rakete, $M > 0$ die Masse der Erde, $\gamma > 0$ die universelle Gravitationskonstante und $R > 0$ der Erdradius ist.

b) Das Gravitationspotential ist also gegeben durch $U(x) = -\gamma \frac{Mm}{x}$, und der Energiesatz lautet

$$E = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \gamma \frac{Mm}{x}. \quad (8)$$

Ist $x(t)$ unbeschränkt für $t \rightarrow \infty$, so folgt $E \geq 0$. Ist dagegen $R \leq x(t) \leq A$ für alle $t \geq 0$, so folgt

$$\frac{m}{2} \dot{x}^2 = E + \gamma \frac{Mm}{x} \geq E + C$$

mit $C = \gamma \frac{Mm}{A} > 0$. Aus $E \geq 0$ folgte dann der Widerspruch $x(t) \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$, also muß $E < 0$ gelten.

c) Es ist also $E = \frac{m}{2} v_0^2 - \gamma \frac{Mm}{R} = 0$ die minimale Energie, für die $x(t)$ unbeschränkt ist. Die entsprechende *Fluchtgeschwindigkeit* ist

$$v_F = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} \sim 11,2 \text{ km/s}. \quad (9)$$

d) Für $E > 0$ gilt nach (8) $\dot{x} \geq v_\infty := \sqrt{\frac{2E}{m}} > 0$, und man hat $\dot{x} \rightarrow v_\infty$ für $t \rightarrow \infty$. Folglich gilt

$$\varphi(t) \geq R \left(1 + \frac{v_\infty}{R}\right) t, \quad t \geq 0. \quad (10)$$

e) Für $v_0 = v_F$, also $E = 0$, lautet (8) so:

$$t = \int_R^{\varphi(t)} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2}{m}\gamma \frac{Mm}{\xi}}} = \frac{1}{\sqrt{2\gamma M}} \int_R^{\varphi(t)} \sqrt{\xi} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\gamma M}} \frac{2}{3} (\varphi(t)^{3/2} - R^{3/2});$$

die Lösung ist also gegeben durch

$$\varphi(t) = \left(R^{3/2} + \left(\frac{3}{2} \sqrt{2\gamma M} t\right)^{2/3}\right)^{2/3} = R \left(1 + \frac{3}{2} \frac{v_F}{R} t\right)^{2/3}. \quad (11)$$

f) Im Fall $E < 0$ hat die Höhe $\varphi(t)$ ein Maximum $x_1 = \varphi(t_1)$, und nach (8) gilt

$$x_1 = -\gamma \frac{Mm}{E}. \quad (12)$$

Die Bewegung ist symmetrisch um den Zeitpunkt t_1 . Für $t \geq t_1$ hat man nach (6)

$$\begin{aligned} t - t_1 &= - \int_{x_1}^x \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2}{m}(E + \gamma \frac{Mm}{\xi})}} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_x^{x_1} \frac{d\xi}{\sqrt{E + \gamma \frac{Mm}{\xi}}} \\ &= \sqrt{\frac{m}{2}} \int_x^{x_1} \frac{d\xi}{\sqrt{\gamma Mm (\frac{1}{\xi} - \frac{1}{x_1})}} = \sqrt{\frac{1}{2\gamma M}} \int_x^{x_1} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{x_1 - \xi}{x_1 \xi}}} \\ &= \sqrt{\frac{x_1}{2\gamma M}} \int_x^{x_1} \sqrt{\frac{\xi}{x_1 - \xi}} d\xi, \end{aligned}$$

und Integration liefert

$$t - t_1 = \sqrt{\frac{x_1}{2\gamma M}} (\sqrt{x(x_1 - x)} + x_1 \arctan \sqrt{\frac{x_1 - x}{x}}). \quad (13)$$

g) Die Auflösung von (13) nach x ist schwierig. Mit

$$\alpha := 2 \arctan \sqrt{\frac{x_1 - x}{x}} \in [0, \pi)$$

berechnet man

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1}{1 + \tan^2(\alpha/2)} = x_1 \cos^2(\alpha/2) = \frac{x_1}{2} (1 + \cos \alpha), \\ x_1 - x &= x_1 \sin^2(\alpha/2), \quad t - t_1 = \sqrt{\frac{x_1}{2\gamma M}} \frac{x_1}{2} (\alpha + \sin \alpha). \end{aligned}$$

Mit der zeitlichen Skalierung

$$t = \tau \sqrt{\frac{x_1}{2\gamma M}}, \quad t_1 = \tau_1 \sqrt{\frac{x_1}{2\gamma M}},$$

erhält man für den Raketenflug die *Zykloide*

$$(\tau, x) = (\tau_1 + \frac{x_1}{2} (\alpha + \sin \alpha), \frac{x_1}{2} (1 + \cos \alpha)) \quad (14)$$

in der (τ, x) -Ebene. Diese entsteht durch die Bewegung eines Punktes P auf der Kreislinie mit Radius x_1 , die auf der τ -Achse abrollt, so daß er die maximale Höhe in (τ_1, x_1) erreicht.

42.4 Expansion des Universums. Die Überlegungen aus 42.3 sind auch auf ein einfaches Modell der *Kosmologie* anwendbar:

a) Man nimmt an, daß das Universum zur Zeit $t > 0$ nach dem Urknall eine expandierende Kugel mit Radius $R(t) > 0$ um die Singularität ausfüllt; dabei sei die homogene Dichte $\rho(t) > 0$ nur von t abhängig. Zum (jetzigen) Zeitpunkt $t_0 > 0$ sei $\rho(t_0) = \rho_0$. Wir betrachten eine spezielle Galaxis mit Zentrumsabstand $x(t_0) = x_0$ und bezeichnen mit $x(t) = x(t; x_0)$ den Zentrumsabstand zu anderen Zeiten $t > 0$. Für die Masse $M(t; x_0)$ aller Teilchen zur Zeit t , die zur Zeit t_0 sich in der Kugel mit Radius x_0 befanden, gilt dann $M(t; x_0) = M(t_0; x_0) =: M$. Wegen $M = \frac{4\pi}{3} x(t; x_0)^3 \rho(t)$ ist

$$\frac{x(t; x_0)}{x_0} = \sqrt[3]{\frac{\rho_0}{\rho(t)}} =: A(t)$$

unabhängig von der Wahl von x_0 und nur von t abhängig. Dies gilt dann auch für die Funktion $H(t) = \frac{\dot{x}(t)}{x(t)}$; mit $H_0 = H(t_0)$ wird die *Hubble-„Konstante“* bezeichnet. Messungen zeigen

$$\frac{1}{H_0} \sim 20 \cdot 10^9 \text{ Jahre}$$

für die *Hubble-Zeit* $\frac{1}{H_0}$. Für $t \neq t_0$ ist $H(t)$ allerdings nicht bekannt.

b) Nach dem Gravitationsgesetz hat man nun wie in (7)

$$m\ddot{x} = -\gamma \frac{Mm}{x^2} = -\frac{4\pi}{3} \gamma \frac{\rho_0 x_0^3 m}{x^2}, \quad x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0, \quad (15)$$

und die Energie ist gegeben durch

$$E = \frac{m}{2} v_0^2 - \frac{4\pi}{3} \gamma \rho_0 m x_0^2 = \frac{m x_0^2}{2} (H_0^2 - \frac{8\pi}{3} \gamma \rho_0). \quad (16)$$

Die Frage, ob das Universum ständig expandiert oder nach Erreichen eines maximalen Radius wieder schrumpft, wird durch das Vorzeichen von E beantwortet. Mit der *kritischen Dichte* $\rho^* = \frac{3H_0^2}{8\pi\gamma}$ ist also die Frage, ob $\rho_0 \leq \rho^*$ gilt. Leider sind die gegenwärtigen Schätzungen für ρ_0 so unsicher, daß sich dies nicht entscheiden läßt.

c) Für das *Alter des Universums* hat man mit $\sigma_0 := \frac{\rho_0}{\rho^*}$ nach (6)

$$\begin{aligned} t_0 &= \int_0^{x_0} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2}{m} (E + \gamma \frac{Mm}{\xi})}} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^{x_0} \frac{d\xi}{\sqrt{E + \gamma \frac{4\pi}{3} \frac{\rho_0 x_0^3 m}{\xi}}} \\ &= \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^{x_0} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{m}{2} v_0^2 + \frac{4\pi}{3} \gamma \rho_0 m x_0^2 (\frac{x_0}{\xi} - 1)}} = \frac{1}{v_0} \int_0^{x_0} \frac{d\xi}{\sqrt{1 + \frac{8\pi\gamma}{3H_0^2} \rho_0 (\frac{x_0}{\xi} - 1)}} \\ &= \frac{1}{v_0} \int_0^{x_0} \frac{d\xi}{\sqrt{1 + \frac{\rho_0}{\rho^*} (\frac{x_0}{\xi} - 1)}} = \frac{1}{H_0 x_0} \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{\xi}{\xi + \sigma_0 (x_0 - \xi)}} d\xi \\ &= \frac{1}{H_0} \int_0^1 \sqrt{\frac{s}{(1 - \sigma_0) s + \sigma_0}} ds < \frac{1}{H_0}. \end{aligned}$$

Im *parabolischen Fall* $\sigma_0 = 1$ erhält man die *Friedmann-Zeit*

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \sqrt{s} ds = \frac{2}{3} \frac{1}{H_0} \sim 13,7 \cdot 10^9 \text{ Jahre},$$

was in Ermangelung einer besseren Schätzung oft als Alter des Universums betrachtet wird.

42.5 Harmonischer Oszillator. a) Der Auslenkungswinkel eines *starrten ebenen Pendels* x der Länge $\ell > 0$ erfüllt mit $g > 0$ die Differentialgleichung $m\ell\ddot{x} = -mg \sin x$ mit $\omega^2 := \frac{g}{\ell} > 0$ also

$$m\ddot{x} = -m\omega^2 \sin x. \quad (17)$$

b) Für kleine Winkel x kann man (17) näherungsweise durch die *linearisierte* Version

$$m\ddot{x} = -m\omega^2 x \quad (18)$$

ersetzen. Als Potential wählt man dann $U(x) = \frac{m}{2} \omega^2 x^2$. Für ein $0 < A < \pi$ sei die Anfangsbedingung gegeben durch

$$x(0) = -A, \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (19)$$

Es ist $E = \frac{m}{2} \omega^2 A^2$, und nach 42.2 b) erhält man

$$t = \pm \frac{1}{\omega} \int_{-A}^{\varphi(t)} \frac{d\xi}{\sqrt{A^2 - \xi^2}} = \pm \frac{1}{\omega} \arcsin\left(\frac{\xi}{A}\right) \Big|_{-A}^{\varphi(t)} = \pm \frac{1}{\omega} \left(\arcsin \frac{\varphi(t)}{A} + \frac{\pi}{2} \right),$$

also

$$\varphi(t) = A \sin(\pm(\omega t) - \frac{\pi}{2}) = -A \cos(\pm\omega t) = -A \cos \omega t \quad (20)$$

als *Lösung* des Anfangswertproblems (18), (19). Ihre Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$ hängt nicht von ihrer Amplitude ab.

42.6 Pendelschwingungen. a) Zur *Lösung* des Anfangswertproblems (17), (19) wählt man

$$U(x) = -m\omega^2 \cos x \quad (21)$$

als Potential. Man hat $E = -m\omega^2 \cos A$ und erhält gemäß 42.2 b)

$$t = \pm \frac{1}{\omega} \int_{-A}^{\varphi(t)} \frac{d\xi}{\sqrt{2 \cos \xi - 2 \cos A}}. \quad (22)$$

b) Nun beachtet man

$$2 \cos \xi - 2 \cos A = 4k^2 \left(1 - \frac{1}{k^2} \sin^2 \frac{\xi}{2}\right) \quad \text{mit } k := \sin \frac{A}{2} \in [0, 1],$$

substituiert

$$\sin \eta := \frac{1}{k} \sin \frac{\xi}{2}, \quad \frac{d\xi}{d\eta} = \frac{2k \cos \eta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \eta}}$$

und erhält für $t > 0$ mit $a(t) := \arcsin\left(\frac{1}{k} \sin \frac{\varphi(t)}{2}\right)$ dann

$$t = \frac{1}{\omega} \int_{-\pi/2}^{a(t)} \frac{d\eta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \eta}}. \quad (23)$$

c) Nun ist das *elliptische Integral erster Gattung* zum Modul k gegeben durch

$$F(s, k) := \int_0^s \frac{d\eta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \eta}}, \quad |s| \leq \frac{\pi}{2}, \quad (24)$$

und durch die Substitution $t = \sin \eta$ erhält man $F(s, k) = u(\sin s, k)$ mit

$$u(x, k) := \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}}, \quad |x| \leq 1. \quad (25)$$

Mittels der Extremfälle $k = 0$ und $k = 1$ erhält man die Abschätzung

$$\arcsin x \leq u(x, k) \leq \operatorname{Artanh} x, \quad |x| < 1. \quad (26)$$

Mit $K(k) := u(1, k)$ ist

$$u(\cdot, k) : [-1, 1] \mapsto [-K(k), K(k)]$$

streng monoton wachsend und bijektiv; die Umkehrabbildung

$$\operatorname{sn}(\cdot, k) : [-K(k), K(k)] \mapsto [-1, 1]$$

heißt *Sinus Amplitudinis*. Ähnlich wie der Sinus kann auch $\operatorname{sn}(\cdot, k)$ zu einer $4K(k)$ -periodischen Funktion auf \mathbb{R} fortgesetzt werden.

d) Wegen $F(-\frac{\pi}{2}) = -F(\frac{\pi}{2}) = -K(k)$ folgt nun aus (23) weiter

$$t = \frac{1}{\omega} (F(a(t), k) - F(-\frac{\pi}{2}, k)) = \frac{1}{\omega} (u(\frac{1}{k} \sin \frac{\varphi(t)}{2}, k) + K(k)),$$

und durch Auflösung nach φ erhält man

$$\varphi(t) = 2 \arcsin(k \operatorname{sn}(\omega t - K(k), k)), \quad k = \sin \frac{A}{2}. \quad (27)$$

Die Lösung des *Anfangswertproblems* (17), (19) ist also *periodisch* mit der (über k) von der Anfangsamplitude A abhängigen Periode $T = \frac{4}{\omega} K(k)$.

42.7 Erzwungene Schwingungen. a) Die allgemeine Lösung von (18) ist gegeben durch

$$\varphi(t) = B \sin \omega t - A \cos \omega t, \quad A, B \in \mathbb{K}. \quad (28)$$

b) Wirkt nun eine äußere Kraft $mF(t)$ auf das Pendel, so erhält man für kleine Winkel x die *inhomogene* Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F(t). \quad (29)$$

Ist $F(t) := M \cos \alpha t$ periodisch, so führt der *Ansatz* $x(t) = C \cos \alpha t$ auf

$$\ddot{x} + \omega^2 x = (-C\alpha^2 + C\omega^2) \cos \alpha t = M \cos \alpha t,$$

also $C = \frac{M}{\omega^2 - \alpha^2}$ für $\alpha \neq \omega$. Nach Feststellung 40.3 ist daher für $\alpha \neq \omega$ die allgemeine Lösung gegeben durch

$$\varphi(t) = B \sin \omega t - A \cos \omega t + \frac{M}{\omega^2 - \alpha^2} \cos \alpha t, \quad A, B \in \mathbb{K}. \quad (30)$$

c) Insbesondere ist $\varphi_\alpha(t) := \frac{M}{\omega^2 - \alpha^2} (\cos \alpha t - \cos \omega t)$ eine Lösung von (29). Für $\alpha \rightarrow \omega$ erhält man mit der *Regel von de l'Hospital*

$$\varphi_\omega(t) = \frac{M}{2\omega} t \sin \omega t, \quad (31)$$

und diese für $t \rightarrow \infty$ *unbeschränkte* Funktion ist in der Tat eine Lösung von (29) im *Resonanz-Fall* $\alpha = \omega$. Man beachte allerdings, daß (29) nur für *kleine* Winkel x das Pendel beschreibt.

42.8 Schwingungen mit Reibung. a) Durch Berücksichtigung eines *Reibungsterms* $2\rho > 0$ erhält man die (29) verallgemeinernde lineare Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega^2x = F(t). \quad (32)$$

Später wird gezeigt, daß der Lösungsraum der *homogenen* Gleichung *zweidimensional* ist. Der *Ansatz* $x(t) = e^{\lambda t}$ mit zu bestimmenden Zahlen $\lambda \in \mathbb{C}$ führt auf $\lambda^2 + 2\rho\lambda + \omega^2 = 0$, also

$$\lambda_{\pm} = -\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \omega^2}. \quad (33)$$

b) Im Fall $\rho \geq \omega$ sind λ_+ und λ_- *reell* und < 0 , und man erhält die exponentiell abklingenden Lösungen

$$\varphi(t) = Ae^{\lambda_+ t} + Be^{\lambda_- t} \quad \text{für } \rho > \omega, \quad (34)$$

$$\varphi(t) = Ae^{-\rho t} + Bte^{-\rho t} \quad \text{für } \rho = \omega. \quad (35)$$

Ein Reibungsterm $2\rho \geq 2\omega$ erzeugt also eine so starke Dämpfung, daß keine Schwingung stattfindet.

c) Im Fall $\rho < \omega$ ist $\lambda_{\pm} = -\rho \pm i\sigma$ mit $\sigma = \sqrt{\omega^2 - \rho^2}$. Aus (34) ergibt sich dann die allgemeine *reelle* Lösung der homogenen Differentialgleichung (32) als *gedämpfte Schwingung*

$$\varphi(t) = Ae^{-\rho t} \cos \sigma t + Be^{-\rho t} \sin \sigma t. \quad (36)$$

d) Für das *inhomogene* Problem (29) mit periodischer äußerer Kraft $F(t) = Me^{i\alpha t}$ ($M, \alpha > 0$) führt der *Ansatz* $x(t) = Ce^{i\alpha t}$ auf

$$\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega^2x = (-C\alpha^2 + C2\rho i\alpha + C\omega^2)e^{i\alpha t} = Me^{i\alpha t},$$

also $C = \frac{M}{\omega^2 - \alpha^2 + 2i\rho\alpha}$. Mit $\delta := \text{Arg } C$ ist dann

$$\varphi(t) = \frac{M}{\sqrt{(\omega^2 - \alpha^2)^2 + 4\rho^2\alpha^2}} e^{i(\alpha t + \delta)} \quad (37)$$

eine spezielle Lösung von (29), zu der noch exponentiell abklingende Terme (34), (35) oder (36) zu addieren sind. Im Fall $\omega^2 > 2\rho^2$ erreicht die Amplitude $|C|$ von φ ihr *Maximum* bei $\alpha = \sqrt{\omega^2 - 2\rho^2}$, also nicht genau bei der *Eigenfrequenz* ω . Wegen $\text{Im } C < 0$ gilt stets $\delta < 0$; die *erzwungene Schwingung* ist also gegenüber der äußeren Kraft *verzögert*.

42.9 Mehrdimensionale Schwingungen. Kleine Schwingungen eines Massenpunktes im \mathbb{R}^n werden näherungsweise durch das System

$$m\ddot{x} = -mAx \quad (38)$$

beschrieben, wobei $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ eine *positiv definite* Matrix ist. Nach Theorem 36.10 gibt eine *orthogonale Matrix* $T \in \mathbb{O}_n(\mathbb{R})$, so daß

$$T^{-1}AT = D = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2) \quad \text{mit } \omega_j > 0 \quad (39)$$

diagonal ist, und für $\xi := T^{-1}x$ lautet (38) dann einfach

$$\ddot{\xi} = T^{-1}\ddot{x} = -T^{-1}Ax = -T^{-1}AT\xi = -D\xi. \quad (40)$$

Die allgemeine Lösung

$$\xi_j(t) = A_j \sin(\omega_j(t - c_j)), \quad j = 1, \dots, n, \quad (41)$$

ist also eine *Überlagerung* von harmonischen Schwingungen in Richtung der Hauptachsen der quadratischen Form Q_A ; die *Frequenzen* sind gerade die Wurzeln der Eigenwerte von A . Dabei treten bereits für $n = 2$ viele verschiedene Bahnkurven auf (*Lissajous-Figuren*).

43 Lineare Systeme

Lineare Systeme von Differentialgleichungen haben die Form

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \quad A \in \mathcal{C}(I, \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n)), \quad b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n). \quad (1)$$

43.1 Satz. Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $\tau \in I$, $\xi \in \mathbb{K}^n$, $A \in \mathcal{C}(I, \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n))$ und $b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \quad x(\tau) = \xi \quad (2)$$

genau eine Lösung $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$.

Genauer studiert werden nun zunächst *homogene* Systeme

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A \in \mathcal{C}(I, \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n)). \quad (3)$$

43.2 Satz. a) Für Lösungen $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$ des homogenen Systems (3) sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(α) Die Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ sind linear unabhängig in $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$,

(β) Die Vektoren $\varphi_1(t), \dots, \varphi_r(t) \in \mathbb{K}^n$ sind für alle $t \in I$ linear unabhängig,

(γ) Die Vektoren $\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_r(t_0) \in \mathbb{K}^n$ sind für ein $t_0 \in I$ linear unabhängig.

b) Die Lösungsmenge $L(A) := \{\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n) \mid \dot{\varphi}(t) = A(t)\varphi(t)\}$ von (3) ist ein Vektorraum der Dimension n .

43.3 Definition. Es seien $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$ linear unabhängige Lösungen des homogenen Systems (3). Dann heißt die Matrixwertige Funktion

$$\Phi := (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n)) \quad (4)$$

ein Fundamentalsystem von (3).

43.4 Bemerkungen. a) Ist Φ ein Fundamentalsystem von (3), so sind nach Satz 43.2 b) alle Lösungen von (3) gegeben durch

$$\varphi(t) = \Phi(t)c, \quad c \in \mathbb{K}^n. \quad (5)$$

b) Sind $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ Lösungen von (3), so löst die Matrix Φ aus (4) die *Matrix-Differentialgleichung*

$$\dot{X} = A(t)X. \quad (6)$$

c) Ist Φ_0 ein festes Fundamentalsystem von (3), so sind alle Lösungen Φ von (6) gegeben durch

$$\Phi(t) = \Phi_0(t)C, \quad C \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n). \quad (7)$$

43.5 Definition. Für eine Lösung $\Phi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n))$ der Matrix-Differentialgleichung (6) heißt $W := W_\Phi := \det \Phi$ Wronski-Determinante von Φ .

Die Wronski-Determinante löst eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung (9), wobei die *Spur*

$$\operatorname{tr} A = \sum_{j=1}^n a_{jj} \quad (8)$$

einer Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n)$ auftritt (vgl. 38.6).

43.6 Satz. *Es sei $\Phi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n))$ eine Lösung von (6). Die Wronski-Determinante $W = W_{\Phi} = \det \Phi$ löst dann die Differentialgleichung*

$$\dot{W}(t) = \operatorname{tr} A(t) W(t). \quad (9)$$

43.7 Bemerkung. Man beachte, daß eine Lösung

$$W(t) = \det \Phi(t) = C \exp(\int \operatorname{tr} A(t) dt) \quad (10)$$

von (9) entweder identisch verschwindet oder keine Nullstelle hat (vgl. auch Bemerkung 40.2 a)).

Inhomogene Systeme (1) lassen sich mit Hilfe eines Fundamentalsystems Φ von (3) durch **Variation der Konstanten** lösen (vgl. Bemerkung 40.4). Der Ansatz $\psi(t) := \Phi(t) c(t)$ führt auf

$$\dot{\psi} = \dot{\Phi}c + \Phi\dot{c} = A\Phi c + \Phi\dot{c} = A\psi + \Phi\dot{c}$$

und somit auf die Bedingung $\Phi\dot{c} = b$. Folglich gilt:

43.8 Satz. *Für ein Fundamentalsystem Φ von (3) und $\tau \in I$ ist*

$$\psi_0(t) = \Phi(t) \int_{\tau}^t \Phi(s)^{-1} b(s) ds \quad (11)$$

die Lösung von (1) mit $\psi_0(\tau) = 0$. Durch $\psi(t) = \psi_0(t) + \Phi(t) c$, $c \in \mathbb{K}^n$, sind alle Lösungen von (1) gegeben.

Eine homogene lineare Differentialgleichungen erster Ordnung $\dot{x} = ax$ mit einem konstanten Koeffizienten hat die Lösungen $\varphi(t) = Ce^{at}$, $C \in \mathbb{K}$. Analog läßt sich auch ein Fundamentalsystem für ein *homogenes lineares System (3) mit konstanten Koeffizienten* berechnen:

43.9 Exponentialfunktion von Matrizen. a) Für $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n)$ oder $A \in L(\mathbb{K}^n)$ definiert man

$$e^A := \exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n) \text{ oder } L(\mathbb{K}^n). \quad (12)$$

b) Wegen $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ konvergiert die Reihe in (12) in $\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n)$ absolut. Die *Potenzreihe*

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} t^k \quad (13)$$

konvergiert samt allen Ableitungen lokal gleichmäßig auf \mathbb{K} und kann somit gliedweise differenziert werden. Es folgt

$$\frac{d}{dt} e^{At} = e^{At} A = A e^{At}. \quad (14)$$

43.10 Satz. Für $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n)$ ist $\Phi(t) := e^{At}$ die Lösung von

$$\dot{X} = AX, \quad X(0) = I, \quad (15)$$

also das Fundamentalsystem von $\dot{x} = Ax$ mit $\Phi(0) = I$.

43.11 Folgerung. Für eine Matrix $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n)$ gilt

$$\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}. \quad (16)$$

Insbesondere hat man also stets $\det e^A > 0$.

43.12 Bemerkungen zur Exponentialfunktion. a) Wie im Fall $n = 1$ gilt auch

$$e^A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I + \frac{A}{n} \right)^n. \quad (17)$$

b) Für kommutierende Elemente $A, B \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n)$ (die also $AB = BA$ erfüllen), gilt die Funktionalgleichung

$$e^{A+B} = e^A e^B. \quad (18)$$

c) Insbesondere gilt $e^A e^{-A} = e^0 = I$, und man hat $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

d) Für $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n)$ sieht man sofort $(e^A)^\top = e^{A^\top}$ (und ebenso $(e^A)^* = e^{A^*}$ für $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{C}}(n)$). Ist insbesondere $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ schiefsymmetrisch, d. h. ist $A^\top = -A$, so ist wegen

$$(e^{At})^\top e^{At} = (e^{-At}) e^{At} = I$$

die Matrix e^{At} stets orthogonal. Die Lösungen $\varphi(t) = e^{At}\xi$ von $\dot{x} = Ax$ verlaufen dann in Sphären um den Nullpunkt.

43.13 Eigenwerte und Eigenvektoren. a) Für jeden Vektor $v \in \mathbb{K}^n$ ist also die Funktion $\varphi_v(t) := e^{At}v$ eine Lösung von $\dot{x} = Ax$. Für jede Zahl $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt auch

$$\varphi_v(t) = e^{\lambda t} e^{(A-\lambda I)t}v = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (A-\lambda I)^k v t^k. \quad (19)$$

b) Ist nun v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$, gilt also $(A-\lambda I)v = 0$, so reduziert sich (19) einfach auf

$$\varphi_v(t) = e^{\lambda t} v. \quad (20)$$

c) Ist nun A diagonalisierbar, d. h. hat \mathbb{K}^n eine Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ aus Eigenvektoren zu Eigenwerten $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ von A , so ist

$$(e^{\lambda_1 t} v_1, \dots, e^{\lambda_n t} v_n) \quad (21)$$

ein Fundamentalsystem von $\dot{x} = Ax$. Dies ist etwa der Fall für symmetrische Matrizen über \mathbb{R} oder für normale Matrizen über \mathbb{C} .

43.14 Hauptvektoren. a) Allgemeiner vereinfacht sich (19) auch wesentlich für *Hauptvektoren* (vgl. 35.10); wegen $(A - \lambda I)^m v = 0$ für die Stufe $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\varphi_v(t) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} (A - \lambda I)^k v t^k =: e^{\lambda t} p_v(t) \quad (22)$$

mit einem (vektorwertigen) *Polynom* p_v vom Grad $m - 1$.

b) Die maximale Stufe $\nu(A; \lambda)$ der Hauptvektoren zum Eigenwert λ ist höchstens gleich $\alpha(A; \lambda)$, der *algebraischen Vielfachheit* von λ . Nach Satz 35.11 besitzt für $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{C}}(n)$ der Raum \mathbb{C}^n eine Basis aus Hauptvektoren von A . Daher gilt:

43.15 Satz. Für $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{C}}(n)$ sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis aus Hauptvektoren zu Eigenwerten $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ von A . Dann ist

$$(e^{\lambda_1 t} p_{v_1}(t), \dots, e^{\lambda_n t} p_{v_n}(t)) \quad (23)$$

ein *Fundamentalsystem* von $\dot{x} = Ax$, wobei die *Polynome* $p_{v_j}(t) = e^{(A - \lambda_j I)t} v_j$ vom Grad $\leq \nu(A; \lambda_j) - 1$ gemäß (22) gebildet werden.

43.16 Beispiele und Bemerkungen. a) Zur Berechnung eines Fundamentalsystems von $\dot{x} = Ax$ bestimmt man also zunächst die verschiedenen Eigenwerte μ_i von A und ihre algebraischen Vielfachheiten α_i . Dann berechnet man die Potenzen $(A - \mu_i I)^{\alpha_i}$ und durch Lösung der homogenen Gleichungssysteme $(A - \mu_i I)^{\alpha_i} x = 0$ Basen der α_i -dimensionalen *Haupträume*

$$V(A, \mu_i) = N((A - \mu_i I)^{\alpha_i}). \quad (24)$$

Damit erhält man dann n linear unabhängige Lösungen gemäß (22) oder (23).

b) Man kann auch nacheinander die Räume $N(A - \mu_i I)^k$, $k = 1, 2, 3, \dots$ berechnen; diese stabilisieren an der Stelle $\nu_i := \nu(A; \mu_i)$, und es ist $V(A, \mu_i) = N((A - \mu_i I)^{\nu_i})$.

c) Beispiel: $A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

43.17 Bemerkungen. a) Für reelle Matrizen $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ folgt aus $(A - \mu I)^k v = 0$ sofort auch $(A - \bar{\mu} I)^k \bar{v} = 0$; für eine Basis $\{v_1, \dots, v_\alpha\}$ von $V(A; \mu)$ ist also $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_\alpha\}$ eine Basis von $V(A; \bar{\mu})$. Die entsprechenden Lösungen des Systems $\dot{x} = Ax$ sind

$$\varphi_{v_j}(t) = e^{At} v_j = e^{\mu t} p_{v_j}(t) \quad \text{und} \quad \overline{\varphi_{v_j}(t)} = e^{A^t \bar{v}_j} = e^{\bar{\mu} t} p_{\bar{v}_j}(t).$$

b) Zu einem Eigenwert $\mu = \gamma + i\omega$ mit $\omega > 0$ von A erhält man also durch

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \varphi_{v_j}(t) &= e^{\gamma t} (\cos \omega t \operatorname{Re} p_{v_j}(t) - \sin \omega t \operatorname{Im} p_{v_j}(t)), \\ \operatorname{Im} \varphi_{v_j}(t) &= e^{\gamma t} (\cos \omega t \operatorname{Im} p_{v_j}(t) + \sin \omega t \operatorname{Re} p_{v_j}(t)) \end{aligned}$$

2α über \mathbb{R} linear unabhängige *reelle* Lösungen von $\dot{x} = Ax$. Im Fall $\omega = 0$, also $\mu = \gamma \in \mathbb{R}$, erhält man so α über \mathbb{R} linear unabhängige *reelle* Lösungen. Somit gilt:

43.18 Satz. *Es sei $\{\lambda_1 = \gamma_1 + i\omega_1, \dots, \lambda_n = \gamma_n + i\omega_n\}$ die Menge der komplexen Eigenwerte einer reellen Matrix $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$. Dann besitzt das lineare System $\dot{x} = Ax$ ein reelles Fundamentalsystem*

$$\varphi_j(t) = e^{\gamma_j t} (\cos \omega_j t a_j(t) + \sin \omega_j t b_j(t)), \quad j = 1, \dots, n, \quad (25)$$

mit Polynomen $a_j, b_j \in \mathbb{R}[t]$ vom Grad $\leq \nu(A; \lambda_j) - 1$.

Aus den Sätzen 43.15 und 43.18 ergibt sich:

43.19 Folgerung. *a) Für $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n)$ gilt genau dann $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} = 0$, wenn $\operatorname{Re} \lambda < 0$ für alle Eigenwerte von A ist.*

b) Es gilt genau dann $\sup \{\|e^{At}\| \mid t \geq 0\} < \infty$, wenn $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ für alle Eigenwerte von A ist und alle rein imaginären Eigenwerte halbeinfach sind, d. h. die gleiche algebraische und geometrische Vielfachheit besitzen.