Prof. Dr. W. Kaballo

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

Lösungen zum 6. Übungsblatt zur Höheren Mathematik II (P/ET/IT/AI)

SS 2009 (Kaballo/Furlan)

Aufgabe 21:

(i) Eigenwert $\lambda = 1$:

Es ist $A - I = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Die dritte Zeile wird zweimal bzw. dreimal von der zweiten bzw. ersten subtrahiert. Die entstehende Matrix ist $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Eine Basis des Kerns ist $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Eigenwert $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$:

$A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Man erkennt direkt, dass die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts auch zwei ist und hat als Basis des Eigenraums z.B. $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(ii) Eigenwert $\lambda = 1$:

Es ist $A - I = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Die dritte Zeile wird von der ersten subtrahiert, und man erhält $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Eine Basis des Kerns ist $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Eigenwert $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$:

$A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -5 \\ 2 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ hat sicher Rang 2, und daher ist die geometrische Vielfachheit von $\lambda = 2$ nur eins.
Da die Dimension des Kerns der Potenzen von $A - \lambda I$ solange zunehmen muss, bis die Dimension des Kerns gleich der algebraischen Vielfachheit ist, muss $(A - \lambda I)^2$ Rang 1 haben. Daher reicht es, die erste (nicht - Null-) Zeile zu bestimmen:

Die erste Zeile von $(A - 2I)^2$ ist $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, die anderen Zeilen müssen Vielfache davon sein. Eine Basis des Hauptraums ist daher $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (Hauptvektoren 2. Stufe).

Einen Eigenvektor erhält man als $\mathbf{w} = (A - 2I)\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\mathbf{v}_2$ und $\mathbf{w}$ bilden eine Jordankette aus Hauptvektor der Stufe 2 und zugehörigem Eigenvektor.

Die Jordanmatrix hat also die Form $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, und es gilt $A_2 = SJS^{-1}$, wobei S die Spalten $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{w}$ und $\mathbf{v}_2$ hat.

(iii) Man findet zum dreifachen Eigenwert $\lambda = 2$ die Matrix $A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, die offensichtlich Rang 1 hat. Daher muss $(A - 2I)^2$ die Nullmatrix sein, der Hauptraum ist also der $\mathbb{R}^3$.

Offenbar ist $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht im Kern von $A-2I$, wohl aber im Kern von $(A-2I)^2$. Daher ist $\mathbf{v}_1$ Hauptvektor zweiter Stufe, und man erhält $\mathbf{v}_2 = A\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Hauptvektor erster Stufe, d.h. $\mathbf{v}_2$ ist Eigenvektor.

Nun kann man noch $\mathbf{v}_3$ im Kern von $A - 2I$ von $\mathbf{v}_2$ linear unabhängig wählen, z-B- $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Mit $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ und S mit den Spalten $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_3$ ist $A = SJS^{-1}$.

Aufgabe 22:

(i) Es ist $p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots \ddots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$

Wenn man diesen Aufdruck nach der ersten Zeile entwickelt und wählt nicht das Element in der linken Ecke aus, muss man zweimal einen Ausdruck mit λ streichen, den in der linken Ecke und in der betreffenden Spalte.

Dann kann man höchstens noch $n - 2$mal λ erhalten.

Setzt man diese Entwicklung induktiv fort, ergibt sich, dass alle Beiträge zur n-ten und $n - 1$sten Potenz von λ aus dem Ausdruck

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\cdots(a_{nn} - \lambda)$$

kommen. Man erhält genau dann λ^n, wenn man beim Ausmultiplizieren immer den zweiten Summenden nimmt, wegen der Minuszeichen also $(-\lambda)^n = (-1)^n\lambda^n$.

Man erhält λ^{n-1}, wenn man einmal den ersten Summanden nimmt und dann $n - 1$-mal den zweiten. Dafür gibt es n Möglichkeiten. Werden die enstehenden Ausdrücke addiert, ergibt sich

$$a_{11}(-\lambda)^{n-1} + a_{22}(-\lambda)^{n-1} + \cdots a_{nn}(-\lambda)^{n-1} = (-1)^{n-1} \operatorname{tr} A \cdot \lambda^{n-1}.$$

Schließlich ist $a_0 = p(0) = \det(A - 0I) = \det A$.

(ii) Sei $\mathbf{v}$ Eigenvektor von A zum Eigenwert λ.

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Rightarrow (A - \mu I)\mathbf{v} = A\mathbf{v} - \mu\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} - \mu\mathbf{v} = (\lambda - \mu)\mathbf{v}$$

$\mathbf{v}$ ist also Eigenvektor von $A - \mu I$ zum Eigenwert $\lambda - \mu$.

(iii) Für $k = n$ ist nichts zu zeigen. Sei also $k < n$.

A habe Rank k.
Dann hat das Gleichungssystem $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ einen $n - k$-dimensionalen Lösungsraum,
also ist die geometrische Vielfachheit von $\lambda = 0$ gleich $n - k$,
also ist die algebraische Vielfachheit von $\lambda = 0$ mindestens $n - k$,
also hat p in $\lambda = 0$ ein mindestens $n - k$-fache Nullstelle.

(iv) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 23:

Für die Elemente der Jordankette gilt, dass

$$(A - \lambda I)^k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}, \qquad \text{aber} \qquad (A - \lambda I)^{k-1}\mathbf{v}_k \neq \mathbf{0}$$

Annahme: die Vektoren $\mathbf{v}_1$ bis $\mathbf{v}_n$ seien linear abhängig. Dann gibt es Zahlen α_1 bis α_n, die nicht alle Null sind, so dass

$$\alpha_n\mathbf{v}_n + \alpha_{n-1}\mathbf{v}_{n-1} + \cdots \alpha_0\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$$

ist. Diese Gleichung wird mit $(A-\lambda I)^{n-1}$ multipliziert:

$$\alpha_n \underbrace{(A-\lambda I)^{n-1}\mathbf{v}_n}_{\neq \mathbf{0}} + \underbrace{(A-\lambda I)^{n-1}\mathbf{v}_{n-1}}_{=\mathbf{0}} + \cdots + \underbrace{(A-\lambda I)^{n-1}\mathbf{v}_1}_{=\mathbf{0}} = \mathbf{0}.$$

Daher muss $\alpha_n = 0$ sein.

Induktiv wird nun die Ausgangsgleichung ohne $\mathbf{v}_n$ mit $(A-\lambda I)^{n-2}$, $(A-\lambda I)^{n-3}$ usw multipliziert, und man erhält den Widerspruch, dass doch alle $\alpha_k = 0$ sein müssen.

Aufgabe 24:

(i) Fasst man die Vektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ als Spalten in einer Matrix V zusammen, und genauso $\mathbf{w}_1$ und $\mathbf{w}_2$ in einer Matrix W, so wird aus $A\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1$ und $A\mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_2$ die Bedingung $AV = W$. Dies wird durch $A = WV^{-1}$gelöst.

Mit $V = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ wird $V^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \\ 10 & -13 \end{pmatrix}$.

(ii) $\mathbf{v}_3$ wird auf $A\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \\ 10 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ 23 \end{pmatrix}$ abgebildet.

Das lässt sich mit viel Mühe auch ohne die Matrixdarstellung von A bestimmen: Man löst das Gleichungssystem $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3$ und findet $\alpha_1 = 7$ und $\alpha_2 = -5$. Dann ist $L(\mathbf{v}_3) = L(7\mathbf{v}_1 - 5\mathbf{v}_2) = 7\mathbf{w}_1 - 5\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ 23 \end{pmatrix}$.

(iii) Hier muss man die Gleichungssysteme $A\mathbf{v} = \mathbf{w}_3$ und $A\mathbf{v} = \mathbf{w}_5$ lösen. Das geschieht simultan mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc|cc} v_1 & v_2 & \mathbf{w}_3 & \mathbf{w}_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & -7 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \\ 10 & -13 & 7 & 1 \end{array}\right) \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{array}\right)$$

Damit ist $L(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}) = \mathbf{w}_3$, und $L(\mathbf{v}) = \mathbf{w}_4$ ist unlösbar.