Prof. Dr. W. Kaballo

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

6. Übungsblatt zur Höheren Mathematik II (P/ET/IT/AI)
SS 2009 (Kaballo/Furlan)

Abgabetermin für die ersten beiden Aufgaben: Mittwoch, 27.05.09, 12:00.

Aufgabe 21:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Das charakteristische Polynom von A_1 ist $p(\lambda) = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$. Bestimmen Sie die Eigen- und Haupträume von A_1.

(ii) Das charakteristische Polynom von A_2 ist $p(\lambda) = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$. Bestimmen Sie die Eigen- und Haupträume von A_2

(iii) Das charakteristische Polynom von A_3 ist $p(\lambda) = -(\lambda-2)^3$. Bestimmen Sie die Eigen- und Haupträume von A_3.

Aufgabe 22:

Sei A eine $n \times n$-Matrix und $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ das charakteristische Polynom.

(i) Beweisen Sie: in $p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0$ ist stets

$a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1}\mathrm{tr}\, A$ und $a_0 = \det A$.

$\mathrm{tr}\, A$ ist die Spur von A, das ist die Summe der Elemente in der Hauptdiagonalen.

Wie kann man damit das charakteristische Polynom einer 2×2-Matrix bestimmen?

(ii) Beweisen Sie: hat A den Eigenvektor $\mathbf{v}$ zum Eigenwert λ, so ist $\mathbf{v}$ auch Eigenvektor von $A - \mu I$. Welches ist der Eigenwert?

(iii) Beweisen Sie: hat A den Rang k, so hat p für $\lambda = 0$ eine Nullstelle der Mindestordnung $n - k$.

(iv) Geben Sie in (iii) ein Beispiel einer 2×2-Matrix an mit $k = 1$, aber einer doppelten Nullstelle für $\lambda = 0$.

Aufgabe 23:

Gegeben seien $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ mit $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$, die eine Jordankette der Matrix A zum Eigenwert λ bilden; d.h. es gelte $(A - \lambda I)\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i-1}$ und $(A - \lambda I)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$.

Beweisen Sie, dass die $\mathbf{v}_i$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 24:

Gegeben seien die Vektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(i) Geben Sie die Matrix A derjenigen linearen Abbildung L an, die $\mathbf{v}_1$ auf $\mathbf{w}_1$ und $\mathbf{v}_2$ auf $\mathbf{w}_2$ abbildet.

(ii) Auf was wird $\mathbf{v}_3$ unter L abgebildet?

(iii) Bestimmen Sie die Urbilder von $\mathbf{w}_3$ und $\mathbf{w}_4$.