

### Aufgabe 53:

① Zunächst wird die notwendige Bedingung  $f'(x, y) = 0$  untersucht.

$$f_x = x^2 + x + y^2 - 2xy - y = 0$$

$$f_y = 2xy - x^2 - x = x(2y - x - 1) = 0$$

Für die zweite Gleichung gibt es zwei Möglichkeiten:  $x = 0$  oder  $x = 2y - 1$ .

Fall A:  $x = 0$ . Dies in  $f_x = 0$  eingesetzt ergibt  $y^2 - y = 0 \Leftrightarrow y(y - 1) = 0$ . Damit sind  $(0, 0)$  und  $(0, 1)$  kritische Punkte.

Fall B:  $x = 2y - 1$ . Einsetzen in  $f_x = 0$ :

$$(2y - 1)^2 + (2y - 1) + y^2 - 2(2y - 1)y - y = 0 \Leftrightarrow 4y^2 - 4y + 1 + 2y - 1 + y^2 - 4y^2 + 2y - y = 0 \Leftrightarrow y^2 - y = 0 \Leftrightarrow y(y - 1) = 0.$$

Für  $y = 0$  ergibt sich aus  $x = 2y - 1$  dann  $x = -1$ , für  $y = 1$  erhält man  $x = 1$ . Also sind  $(-1, 0)$  und  $(1, 1)$  zwei weitere kritische Punkte.

② Zur Klassifikation dieser Stellen wird aus den zweiten Ableitungen die Hessematrix  $H_f$  gebildet und an den kritischen Punkten ausgewertet.

Nach dem Hurwitz-Kriterium ist  $H_f$

- positiv definit für  $f_{xx} > 0$  und  $\det H_f > 0$
- negativ definit für  $f_{xx} < 0$  und  $\det H_f > 0$
- indefinit  $\det H_f < 0$

Dabei ist  $\det H_f = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ .

|                 | $f_{xx} = 2x - 2y + 1$ | $f_{xy} = f_{yx} = -2x + 2y - 1$ | $f_{yy} = 2x$ | $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ |
|-----------------|------------------------|----------------------------------|---------------|---------------------------|
| $x = 0, y = 0$  | 1                      | -1                               | 0             | -1                        |
| $x = 0, y = 1$  | -1                     | 1                                | 0             | -1                        |
| $x = -1, y = 0$ | -1                     | 1                                | -2            | 1                         |
| $x = 1, y = 1$  | 1                      | -1                               | 2             | 1                         |

Damit ist  $H_f$  bei  $(-1, 0)$  negativ definit (rel. Maximum) und bei  $(1, 1)$  pos. definit (rel. Minimum).

Bei  $(0, 0)$  und  $(0, 1)$  ist  $H_f$  indefinit, dort sind also Sattelpunkte.

### Aufgabe 54:

(i) Zunächst stellt man fest, dass  $f(0,1) = 0 + 1 + 0 - 1 = 0$  ist,  $(0,1)$  liegt also auf der durch  $f(x,y) = 0$  definierten Menge.

Weiter ist  $f_y(x,y) = 3y^2 - 2y$  und  $f_y(0,1) = 1 \neq 0$ . Daher ist nach dem Satz über implizite Funktionen die Gleichung  $f(x,y) = 0$  in einer Umgebung  $U$  von  $(0,1)$  in der Form  $y = \varphi(x)$  auflösbar, d.h. es gibt eine Funktion  $\varphi$ , so dass in  $U$  die Gleichung gilt

$$(1) f(x, \varphi(x)) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 + \varphi(x)^3 - \varphi(x)^2 = 0$$

(ii) Der Einfachheit halber verwenden wir  $\varphi := \varphi(x)$  und berechnen sofort drei Ableitungen von  $\varphi$  bei  $x = 0$ .

Durch Differenzieren von (1) unter Beachtung der Kettenregel erhält man

$$x^3 + x^2 + \varphi^3 - \varphi^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 + 2x + 3\varphi^2\varphi' - 2\varphi\varphi' = 0$$

$$(2) \Leftrightarrow 3x^2 + 2x + (3\varphi^2 - 2\varphi)\varphi' = 0$$

Hier werden nun die bekannten Werte  $x = 0$ ,  $\varphi(0) = 1$  eingesetzt:

$$0 + 0 + (3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1)\varphi'(0) = 0$$

Daraus erhält man  $\varphi'(0) = 1$ .

Mit dieser Ableiten-Einsetzen-Methode kann man nun beliebige Ableitungen von  $\varphi$  bei  $x = 0$  ausrechnen.

Ableiten von (2):

$$(3) 6x + 2 + (6\varphi - 2)\varphi'^2 + (3\varphi^2 - 2\varphi)\varphi'' = 0$$

Einsetzen von  $x = 0$ ,  $\varphi(0) = 1$  und  $\varphi'(0) = 1$  ergibt

$$0 + 2 + (6 \cdot 1 - 2) \cdot 1^2 + (3 \cdot 1 - 2 \cdot 1)\varphi''(0) = 0, \text{ also } \varphi''(0) = -2.$$

Ableiten von (3):

$$(4) 6 + 6\varphi'^2 + (6\varphi - 2) \cdot 2 \cdot \varphi'\varphi'' + (6\varphi - 2)\varphi'\varphi'' + (3\varphi^2 - 2\varphi)\varphi''' = 0$$

Einsetzen von  $x = 0$ ,  $\varphi(0) = 1$ ,  $\varphi'(0) = 1$  und  $\varphi''(0) = -2$  ergibt

$$6 + 0 + (6 - 2) \cdot 0 + (6 - 2) \cdot 0 + (3 - 2) \cdot \varphi'''(0) = 0, \text{ also } \varphi'''(0) = -6.$$

Wegen  $\varphi'(0) = 1$  und  $\varphi''(0) < 0$  hat  $\varphi$  für  $x = 0$  ein relatives Maximum.

$$(iii) T_3\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0) \cdot x + \frac{1}{2!}\varphi''(0) \cdot x^2 + \frac{1}{3!}\varphi'''(0) \cdot x^3 = 1 - x^2 - x^3.$$

### Aufgabe 55:

Zunächst werden alle partiellen Ableitungen bis zur dritten Ordnung berechnet:

$$\begin{aligned} f &= \frac{x}{1+y} \\ f_x &= \frac{1}{1+y} & f_y &= \frac{-x}{(1+y)^2} \\ f_{xx} &= 0 & f_{xy} &= \frac{-1}{(1+y)^2} & f_{yy} &= \frac{2x}{(1+y)^3} \\ f_{xxx} &= 0 & f_{xxy} &= 0 & f_{xyy} &= \frac{2}{(1+y)^3} & f_{yyy} &= \frac{-6x}{(1+y)^4} \end{aligned}$$

Die Werte der Ableitungen bis zur zweiten Ordnung am Entwicklungspunkt  $(0, 0)$  sind

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= 0 \\ f_x(0, 0) &= 1 & f_y(0, 0) &= 0 \\ f_{xx}(0, 0) &= 0 & f_{xy}(0, 0) &= -1 & f_{yy}(0, 0) &= 0 \end{aligned}$$

(i) Mit dem Entwicklungspunkt  $(0, 0)$  gilt  $f(x, y) = T_2f(x, y) + R_2f(x, y)$ . Dabei ist

$$\begin{aligned} T_2f(x, y) &= f(0, 0) + f_x(0, 0) \cdot x + f_y(0, 0) \cdot y + \frac{1}{2!} (f_{xx} \cdot x^2 + 2f_{xy}(0, 0) \cdot xy + f_{yy}(0, 0) \cdot y^2) \\ &= 0 + x + 0 + \frac{1}{2}(0 - 2xy + 0) \\ &= x - xy \end{aligned}$$

und damit

$$f(0.2, 0.1) \approx T_2f(0.2, 0.1) = 0.2 - 0.2 \cdot 0.1 = 0.18$$

(ii) Es ist  $R_2f(x, y) = \frac{1}{3!} (f_{xxx}(tx, ty)x^3 + 3f_{xxy}(tx, ty)x^2y + 3f_{xyy}(tx, ty)xy^2 + f_{yyy}(tx, ty)y^3)$ . Dabei ist  $t \in (0, 1)$ .

$f_{xxx}$  und  $f_{xxy}$  sind Null. Wegen  $y = 0.1 > 0$  ist  $1 + ty > 1$  und daher  $|f_{xyy}(tx, ty)| = \left| \frac{2}{(1+ty)^2} \right| < 2$ . Analog wird  $|f_{yyy}(tx, ty)| = \left| \frac{-6tx}{(1+ty)^4} \right| < 6 \cdot 0.2 = 1.2$ .

Damit wird der Fehler  $|R_2f(0.2, 0.1)| \leq \frac{1}{6}(3 \cdot 2 \cdot 0.2 \cdot 0.1^2 + 1.2 \cdot 0.1^3) = 0.002 + 0.0002 = 0.0022$ .

Der wirkliche Fehler liegt bei  $|0.18 - 0.\overline{18}| = 0.001818\dots$

### Aufgabe 56:

Die Hilfsfunktion  $h$  ist gegeben durch  $h(x, y, z, \lambda) = x^2 - yz - \lambda(x^2 + y^2 + 4z^2 - 8)$ .

Die notwendigen Bedingungen für Extrema von  $f$  unter der Nebenbedingung  $g(x, y, z) = 0$  sind damit

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad h_x &= 2x - 2\lambda x = 0 \\ \textcircled{2} \quad h_y &= -z - 2\lambda y = 0 \\ \textcircled{3} \quad h_z &= -y - 8\lambda z = 0 \\ \textcircled{4} \quad h_\lambda &= x^2 + y^2 + 4z^2 - 8 = 0 \end{aligned}$$

Die erste Bedingung ergibt  $2x - 2\lambda x = 2x(1 - \lambda) = 0$ . Es ist also  $x = 0$  oder  $\lambda = 1$ .

$\textcircled{A} \quad x = 0$

$\textcircled{2}$  bedeutet  $z = -2\lambda y$  und  $\textcircled{3}$  bedeutet  $y = -8\lambda z$ . Es ist also  $y = 16\lambda^2 y \Leftrightarrow y(1 - 16\lambda^2) = 0$ .

Aus  $y = 0$  folgt auch  $z = 0$  und die Bedingung  $\textcircled{4}$  ist nicht erfüllt. Es muss also  $\lambda = \pm \frac{1}{4}$  sein.

Ist  $\lambda = \frac{1}{4}$ , so ist  $y = -2z$  und  $\textcircled{4}$  wird zu  $4z^2 + 4z^2 = 8$ , also  $z = \pm 1$ . Damit erhält man die Punkte  $(0, 1, -2)$  und  $(0, -1, 2)$ .

Analog erhält man für  $\lambda = -\frac{1}{4}$  die Punkte  $(0, 1, 2)$  und  $(0, -1, -2)$ .

$\textcircled{B} \quad \lambda = 1$

Dann folgt  $z = -2y = 16z$  und damit  $z = y = 0$ .  $\textcircled{4}$  ergibt die Punkte  $(\pm 2\sqrt{2}, 0, 0)$ .

Da nur die absoluten Extrema gesucht sind, verwenden wir den Satz von Weierstraß: Ist  $M$  kompakt und  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so nimmt  $f$  auf  $M$  ein absolutes Maximum und Minimum an.

$M = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + 4z^2 - 8 = 0\}$  beschreibt ein Ellipsoid, also ist  $M$  beschränkt. Alternativ sieht man das daran, dass sicherlich  $|x|$ ,  $|y|$  und  $|z|$  nicht größer als 3 werden können.

$M$  ist auch abgeschlossen, denn  $M$  ist das Urbild von der abgeschlossenen Menge  $\{0\}$  unter der stetigen Abbildung  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4z^2 - 8$ .

Daher muss es absolute Extrema geben. Diese können nur an den oben gefundenen sechs Punkten sein. Man berechnet

$$f(0, 1, -2) = f(0, -1, 2) = 2, \quad f(0, 1, 2) = f(0, -1, -2) = -2 \quad \text{und} \quad f(\pm 2\sqrt{2}, 0, 0) = 8.$$

Daher hat man bei  $(0, 1, 2)$  und  $(0, -1, -2)$  absolute Minima und bei  $(2\sqrt{2}, 0, 0)$  und  $(-2\sqrt{2}, 0, 0)$  absolute Maxima.

---

Obwohl das in der Aufgabe nicht verlangt war, wird jetzt der Typ der kritischen Punkte mit der Hessematrix bestimmt. Dazu benötigt man

- $\text{grad } g = (2x, 2y, 8z)^\top$
- Der Gradient zeigt in Richtung des Normalenvektors
- Der Tangentialraum besteht aus allen Vektoren, die senkrecht auf dem Gradienten stehen

$\mathbf{v}_1 = (0, 1, -2)$  und  $\mathbf{v}_2 = (0, -1, 2)$  mit  $\lambda = \frac{1}{4}$

Es ist  $h(x, y, z, \lambda) = x^2 - yz - \frac{1}{4}(x^2 + y^2 + 4z^2 - 8) = \frac{3}{4}x^2 - yz - \frac{1}{4}y^2 - z^2$  mit der Hessematrix

$$Hh(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(Die Tatsache, dass diese Matrix indefinit ist, sagt nichts aus, da es nur auf die Einschränkung auf den Tangentialraum ankommt.)

Es ist  $\text{grad } g(\mathbf{v}_{1,2}) = \pm(0, 2, -16)$ . Ein allgemeiner Vektor des Tangentialraums ist daher  $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} t \\ 8s \\ s \end{pmatrix}$ . Die

Einschränkung von  $Hh$  auf den Tangentialraum ist also  $\mathbf{w}^\top Hh \mathbf{w} = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2} \cdot 64s^2 - 2 \cdot 8s^2 - 2s^2 = \frac{3}{2}t^2 - 50s^2$ . Da dies indefinit ist, handelt es sich um Sattelpunkte.

$\mathbf{v}_3 = (0, 1, 2)$  und  $\mathbf{v}_4 = (0, -1, -2)$  mit  $\lambda = -\frac{1}{4}$

Es ist  $h(x, y, z, \lambda) = x^2 - yz + \frac{1}{4}(x^2 + y^2 + 4z^2 - 8) = \frac{5}{4}x^2 - yz + \frac{1}{4}y^2 + z^2$  mit der Hessematrix

$$Hh(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wieder wird auf den Tangentialraum eingeschränkt:  $\text{grad } g(\mathbf{v}_{3,4}) = \pm(0, 2, 16)$ ,  $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} t \\ 8s \\ -s \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{w}^\top Hh \mathbf{w} =$

$$\frac{5}{2}t^2 + \frac{1}{2} \cdot 64s^2 + 2 \cdot 8s^2 + 2s^2 = \frac{5}{2}t^2 = \frac{5}{2}t^2 + 50s^2.$$

Dies ist positiv definit, daher handelt es sich um lokale Minima.

$\mathbf{v}_5 = (2\sqrt{2}, 0, 0)$  und  $\mathbf{v}_6 = (-2\sqrt{2}, 0, 0)$  mit  $\lambda = 1$

Es ist  $h(x, y, z, \lambda) = x^2 - yz - (x^2 + y^2 + 4z^2 - 8) = -yz - y^2 - 4z^2$  mit der Hessematrix

$$Hh(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -8 \end{pmatrix}.$$

$\text{grad } g(\pm 2\sqrt{2}, 0, 0) = \pm(4\sqrt{2}, 0, 0)^\top$ , daher ist ein allgemeiner Tangentialvektor durch  $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ t \end{pmatrix}$  gegeben.

$\mathbf{w}^\top Hh \mathbf{w} = -2t^2 - 2st - 8s^2$ . Die Einschränkung von  $Hh$  auf den Tangentialraum hat also die Matrixdarstellung  $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$ , und diese ist nach dem Hurwitz-Kriterium negativ definit. Alternativ erhält man das

auch aus der Form  $-2t^2 - 2st - 8s^2$  durch quadratische Ergänzung:

$$-2t^2 - 2st - 8s^2 = -2(t^2 + st + 4s^2) = -2\left[\left(t + \frac{s}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}s^2\right]$$

Damit liegen hier relative Maxima vor.