

14. Übungsblatt zur Höheren Mathematik II (P/ET/IT/AI)
SS 2009 (Kaballo/Furlan)

Zu den ersten vier Aufgaben erscheinen in Kürze Musterlösungen, die zweiten vier Aufgaben werden in der ersten Übung im Wintersemester besprochen

Aufgabe 53:

Bestimmen Sie die relativen Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + xy^2 - x^2y - xy .$$

Aufgabe 54:

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = x^3 + y^3 + x^2 - y^2$.

- (i) Weisen Sie nach, dass die Gleichung $f(x, y) = 0$ in einer Umgebung von $(0, 1)$ in der Form $y = \varphi(x)$ nach y auflösbar ist.
- (ii) Berechnen Sie durch implizite Differentiation das zweite Taylorpolynom der Auflösung φ und weisen Sie so nach, dass die Auflösung φ in $x = 0$ ein relatives Maximum hat.
- (iii) Berechnen Sie das dritte Taylorpolynom von φ .

Aufgabe 55:

Sei $f(x, y) = \frac{x}{1+y}$.

- (i) Berechnen Sie das zweite Taylorpolynom zu f im Entwicklungspunkt $(0, 0)$ und damit eine Näherung von $f(0.2, 0.1)$.
- (ii) Geben Sie eine Abschätzung für den Fehler an.

Aufgabe 56:

Bestimmen Sie die absoluten Extrema von

$$f(x, y, z) = x^2 - yz$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4z^2 - 8 = 0.$$

Aufgabe 57:

- (i) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

- (ii) Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f(x, y) = e^{-x}(x^2 - 5xy^2 + 4y^4)$$

ein relatives Maximum im Punkte $(2, 0)$ hat. Untersuchen Sie außerdem das Verhalten der Funktion im Ursprung.

Aufgabe 58:

(i) Man beschreibe in Kugelkoordinaten folgende Teile der Kugel

$$K = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

(a) $\{(x, y, z) \in K, z^2 \geq x^2 + y^2\}$

(b) $\{(x, y, z) \in K, x \geq 0\}$

(c) $\{(x, y, z) \in K, x^2 + y^2 \leq 1\}$ (Schnitt von Kugel und Zylinder)

(d) $\{(x, y, z) \in K, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

(ii) Sei K das Viertel der Kugel, das durch $K = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, y \geq 0, z \geq 0\}$ beschrieben wird.

(a) Skizzieren Sie K .

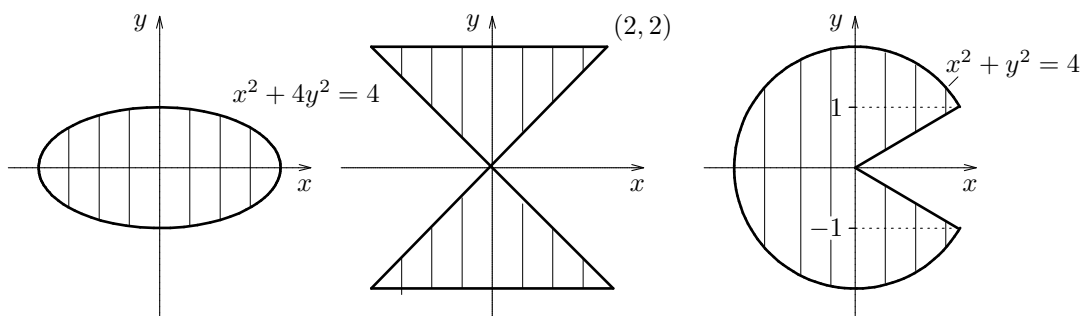
(b) Beschreiben Sie K sowohl in Kugelkoordinaten wie auch in Zylinderkoordinaten $(x, y, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$.

(c) Geben Sie Parametrisierungen der drei Teilflächen an, aus denen K besteht.

(d) Eine der Flächen ist Teil der Kugeloberfläche. Geben Sie Parametrisierungen für die Randkurven davon an.

Aufgabe 59:

Beschreiben Sie die schraffierten Mengen in ebenen Polarkoordinaten ($x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$).



Aufgabe 60:

Bestimmen Sie die absoluten Extrema von $f(x, y) = e^x(x^2 - 2y^2)$ auf der durch $x^2 + 2y^2 \leq 6$ definierten Teilmenge des \mathbb{R}^2

Bestimmen Sie einzeln Extrema im Inneren und auf dem Rand mit jeweils passenden Methoden.