Dr. P. Furlan

Fakultät Mathematik
Technische Universität Dortmund

Klausur zur Höheren Mathematik I (P/ET/IT/AI/IKT) WS 2009/10

Aufgabe 1: .... 6+6+5=17 Punkte

Sei $z_1 = 4\exp(\frac{\pi}{6}i)$ und $z_2 = 2\exp(\frac{\pi}{2}i)$.

(i) Geben Sie $z_1 \cdot z_2$ und $\dfrac{z_1}{z_2}$ sowohl in Polarkoordinaten wie auch in der Form $a + bi$ an.

(ii) Bestimmen Sie alle $w \in \mathbb{C}$ mit $w^2 = z_2$.

(iii) Bestimmen Sie $|z_1 - z_2|$.

....

(i) $z_1 \cdot z_2 = 8\exp(\dfrac{2}{3}\pi)$

$= 8(\cos\dfrac{2}{3}\pi + i\sin\dfrac{2}{3}\pi)$

$= 8(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i)$

$= -4 + 4\sqrt{3}i$

$\dfrac{z_1}{z_2} = 2\exp(-\dfrac{\pi}{3}i)$

$= 2(\cos\dfrac{-\pi}{3} + i\sin\dfrac{-\pi}{3})$

$= 2(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i)$

$= 1 - \sqrt{3}i$

(ii) $|w| = \sqrt{2}$

$\arg w = \frac{\pi}{4}$ oder $\arg w = -\frac{3\pi}{4}$

$w_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

$= 1 + i$

$w_2 = -w_1 = -1 - i.$

(iii) $z_1 = 4(\cos {}^{\pi}/_{6} + i\sin {}^{\pi}/_{6})$

$= 4\Big(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\Big)$

$= 2\sqrt{3} + 2i$

$z_2 = 2(\cos {}^{\pi}/_{2} + i\sin {}^{\pi}/_{2})$

$= 2(0 + i) = 2i.$

Damit ist $z_1 - z_2 = 2\sqrt{3} = |z_1 - z_2|$

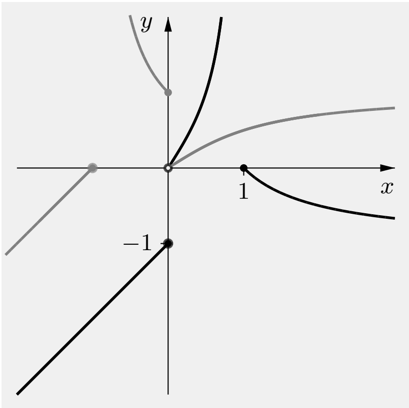
Aufgabe 2: .... 11+9=20 Punkte

(i) Sei $f(x) = \begin{cases} \tan\frac{\pi}{2}x & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x} - 1 & x \geq 1 \\ x - 1 & x \leq 0 \end{cases}$.

Skizzieren Sie den Graphen von f und bestimmen Sie die Umkehrfunktion.

(ii) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $g_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g_\alpha(x) = \alpha x - x^3$.
Für welche Werte von α ist g_α injektiv?

....

(i) 

$x = \tan \frac{\pi}{2} y \Leftrightarrow y = \frac{2}{\pi} \arctan x$
Das Bild von $(0, 1)$ unter f ist $(0, \infty)$

$x = \frac{1}{y} - 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{x+1}$.
Das Bild von $[1, \infty)$ unter f ist $(-1, 0]$.

$x = y - 1 \Leftrightarrow y = x + 1$
Das Bild von $(-\infty, 0]$ unter f ist $(-\infty, -1]$

Damit ist $f^{-1} = \begin{cases} x+1 & x \leq -1 \\ \frac{1}{x+1} & -1 < x \leq 0 \\ \frac{2}{\pi} \arctan x & x > 0 \end{cases}$

(ii) g_α ist injektiv, wenn g_α streng monoton ist.
Wegen $g'_\alpha(x) = \alpha - 3x^2$ ist dies dann der Fall, wenn $\alpha < 0$ ist.
Für $\alpha = 0$ ist $g_0(x) = -x^3$ und damit auch injektiv.
Für $\alpha > 0$ hat g_α wegen $g''_\alpha(x) = -6x$ bei $\sqrt{\alpha}$ ein Maximum und bei $-\sqrt{\alpha}$ ein Minimum und ist daher nicht injektiv.

Aufgabe 3:...6+6+8=20 Punkte

(i) Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-2n} \cos n$?

(ii) Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$?

(iii) Bestimmen Sie den Konvergenzradius von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n)!}{(3n)!} x^n$

....

(i) Es ist $|(-1)^n e^{-2n} \cos n| \leq e^{-2n} = (e^{-2})^n$.
Wegen $|e^{-2}| < 1$ ist die geometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{-2})^n$ eine konvergente Majorante.

(ii) Wegen $\frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n} = \frac{1 - (2/3)^n}{1 - (2/3)^n} \to 1$ divergiert die Reihe, da die Glieder nicht gegen Null gehen.

(iii) Mit $a_n = \frac{n!(2n)!}{(3n)!}$ ist $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{n!\,(2n)!\,(3n+3)!}{(n+1)!\,(2n+2)!\,(3n)!}$
$= \frac{n! \cdot (2n)! \cdot (3n+3) \cdot (3n+2) \cdot (3n+1) \cdot (3n)!}{(n+1) \cdot n! \cdot (2n+2) \cdot (2n+1) \cdot (2n)! \cdot (3n)!}$
$= \frac{(3n+3) \cdot (3n+2) \cdot (3n+1)}{(n+1) \cdot (2n+2) \cdot (2n+1)}$
$\to \frac{27}{4}$. Der Konvergenzradius ist also $r = \frac{27}{4}$.

Aufgabe 4: .... 9+14=23 Punkte

(i) Sei E die von $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ aufgespannte Ebene im $\mathbb{R}^3$.

Bestimmen Sie den Abstand von $\vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ zu E.

(ii) Die Matrix $B = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 6 \\ 6 & -3 & -6 \\ -9 & 6 & 10 \end{pmatrix}$ hat das charakteristische Polynom $p(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda$.

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren von B.

....

(i) Es ist $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Damit ist die Hesseform der Ebene $x \cdot \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$.

Der Abstand von $\vec{w}$ zu E ist $d(\vec{w}, E) = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right|$

$= \frac{20}{\sqrt{42}}$

(ii) Es ist $p(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda = -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = -\lambda(\lambda - 1)^2$
Damit ist $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_{2,3} = 1$

Eigenvektor zu $\lambda_1 = 0$: Man teilt die mittlere Zeile durch 3:
$\begin{pmatrix} -5 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -2 \\ -9 & 6 & 10 \end{pmatrix}$
$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
Wählt man die dritte Komponente $x_3 = 3$, so erhält man $x_1 = 2$ und dann $x_2 = -2$. Eigenvektoren sind also alle Vektoren $\vec{v} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $t \neq 0$.

Eigenvektoren zu $\lambda_{2,3} = 1$: Bestimme den Kern von $B - 1 \cdot E$:
$B - E = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 6 \\ 6 & -4 & -6 \\ -9 & 6 & 9 \end{pmatrix}$. Man sieht, dass es nur eine linear unabhängige Zeile gibt.

Eine Basis des Eigenraums ist z.B. $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und

$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Eigenvektoren sind alle Vektoren $\vec{v} = r\vec{v}_2 + s\vec{v}_3$, r, s nicht beide Null.

Aufgabe 5:..6+8+6=20 Punkte

Bestimmen Sie

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{x \sin x}$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0+} \sin x \cdot \ln x$

(iii) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sin \ln x}{\ln x}$

....

(i) Zweimalige Anwendung der Regel von de l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x \sin x} \overset{''\frac{0}{0}''}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x \cos x + \sin x}$$

$$\overset{''\frac{0}{0}''}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2 \cos x - x \sin x}$$

$$= \frac{2}{2} = 1$$

(ii) Umstellen und Regel von de l'Hospital. Um den Logarithmus loszuwerden, muss dieser Term in den Zähler.

$$\lim_{x\to 0+} \sin x \cdot \ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}$$

$$\overset{''\frac{\infty}{\infty}''}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{-\sin^2 x}{x \cos x}$$

$$\overset{''\frac{0}{0}''}{=} \frac{-2 \sin x \cos x}{\cos x - x \sin x}$$

$$= \frac{0}{1} = 0$$

(iii) Für $x \to 0+$ ist $\ln x \to -\infty$

Andererseits ist $|\sin \ln x| \leq 1$

Daher ist $\left|\dfrac{\sin \ln x}{\ln x}\right| \leq \dfrac{1}{|\ln x|}$

$\to 0$